УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2024.04.072

С. Є. МАЛИШЕВ[1], К. В. АВРАМОВ[2]

НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ БАЛКИ З ДИХАЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

[1] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна
[2] Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України,
вул. Комунальників, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: kvavr@kharkov.ua

Виведено два типи диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описують геометрично нелінійні коливання гнучких стрижнів з дихаючими тріщинами, тобто розглядаються механічні коливання з двома джерелами нелінійностей. Перша модель для опису тріщини використовує функцію тріщини, яка враховує тримірній напружений стан в місці тріщини, а друга модель для опису тріщини використовує дельта-функції. Узагальнений варіаційний принцип Ху–Вашидзу застосовується для отримання рівнянь руху в часткових похідних для першої моделі, для другої моделі застосовано принцип Гамільтона. Отримані системи диференціальних рівнянь зведено до інтегро-диференціальних шляхом нехтування інерції повздовжніх коливань та врахування крайових умов. Для опису нелінійності внаслідок дихання тріщини використовується параметр контакту. Метод–Бубнова–Гальоркіна застосовується для отримання нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь із поліноміальною нелінійністю та кусково-лінійними функціями. Для чисельного дослідження нелінійних коливань застосовується метод колокацій спільно з алгоритмом продовження розв'язків по довжині дуги з застосуванням методу автоматичного диференціювання. Застосування методу автоматичного диференціювання дозволяє поєднати точність аналітичного диференціювання з простотою чисельного при реалізації алгоритмів. Для аналізу стійкості та біфуркацій періодичних рухів розраховується матриця монодромії та розраховуються її власні значення, які називаються мультиплікаторами. Скелетні криві нелінійних нормальних форм містять дві петлі, сідло-вузлові біфуркації та біфуркації Неймарка–Сакера. Нелінійні нормальні форми в конфігураційному підпросторі істотно викривлені. Більше того, нелінійні нормальні форми на петлях скелетних кривих мають осцилювальний вигляд у конфігураційному підпросторі. Знайдені петлі на скелетних кривих можуть свідчити про наявність замкнутих петель вимушених коливань.

Ключові слова: *нелінійні коливання гнучких стрижнів, дихаюча тріщина, метод Бубнова–Галеркіна, нелінійні моди, біфуркація Неймарка–Сакера.*

1. *Bovsunovsky A., Surace C.* Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review. Mech. Syst. and Signal Proc. 2015. Vol. 62-63. P. 129–148. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.01.021
2. *Christides S., Barr A. D. S.* One-dimensional theory of cracked Bernoulli- Euler beams. Int. J. Mech. Sci. 1984. Vol. 26. P. 639–648. https://doi.org/10.1016/0020-7403(84)90017-1
3. *Shen M. H. H., Pierre C.* Free vibrations of beams with a single – edge crack. J. Sound Vib. 1994. Vol. 170. P. 237–259. https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1058
4. *Shen M. H. H., Chu Y. C.* Vibrations of beams with a fatigue crack. Comp. Struct. 1992. Vol. 45. P. 79–93. https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90347-3
5. *Chu Y.C, Shen M. H. H.* Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics. AIAA J. 1992. Vol. 30. P. 2512–2519. https://doi.org/10.2514/3.11254
6. *Chondros T. G., Dimarogonas A. D., Yao J.* A continuous cracked beam vibration theory. J. Sound Vib. 1998. Vol. 215. P. 17–34. https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1640
7. *Chati M., Rand R., Mukherjee S.* Modal analysis of a cracked beam. J. Sound Vib. 1997. Vol. 207. P. 249–270. https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1099
8. *Tsyfansky S. L., Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. J. Sound Vib. 1998. Vol. 213. P. 159–168. https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1502
9. *Caddemi S., Cali I., Marletta M.* The non-linear dynamic response of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks. Int. J. Non-Linear. Mech. 2010. Vol. 45. P. 714–726. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.05.001
10. *Carneiro G. N., Ribeiro P.* Vibrations of beams with a breathing crack and large amplitude displacements. J. Mech. Eng. Sci. 2016. Vol. 230. P. 34–54. https://doi.org/10.1177/0954406215589333
11. *Bikri K. El., Benamar R., Bennouna M. M.* Geometrically non-linear free vibrations of clamped–clamped beams with an edge crack. Comp. Struct. 2006. Vol. 84. P. 485–502. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.09.030
12. *Sinha J. K., Friswell M. I., Edwards S.* Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. J. Sound Vib. 2002. Vol. 251. P. 13–38. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3978
13. *Ostachowicz W. M., Krawczuk M.* Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. J. Sound Vib. 1991. Vol. 150. P. 191–201. https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90615-Q
14. *Plakhtienko N. P., Yasinskii S. A.* Resonance of second order in vibrations of a beam containing a transverse crack. Strengh Mater. 1995. Vol. 27. P. 146–152. https://doi.org/10.1007/BF02209480
15. *Avramov K., Raimberdiyev T.* Modal asymptotic analysis of sub-harmonic and quasi-periodic flexural vibrations of beams with cracks. Nonlinear Dyn. 2017. Vol. 88. P. 1213–1228. https://doi.org/10.1007/s11071-016-3305-0

16. *Avramov K., Raimberdiyev T.* Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. Eng. Fract. Mech. 2017. Vol. 178. P. 22–38. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.006
17. *Avramov K., Malyshev S.* Bifurcations and chaotic forced vibrations of cantilever beams with breathing cracks. Eng. Fract. Mech. 2019. Vol. 214. P. 289–303. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.03.021
18. *Palmieri A., Cicirello A.* Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. Int. J. Sol. Struct. 2011. Vol. 48. P. 2184–2195. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.024
19. *Dotti F. E., Cortínez V. H., Reguera F.* Non-linear dynamic response to simple harmonic excitation of a thin-walled beam with a breathing crack. Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. P. 451–467. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.04.052
20. *Zhao X., Zhao Y. R., Gao X. Z., Li X. Y., Li Y. H.* Green′s functions for the forced vibrations of cracked Euler–Bernoulli beams. Mech. Sys. Signal Proc. 2016. Vol. 68–69. P. 155–175. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.06.023
21. *Zhang W., Ma H., Zeng J., Wu S., Wen B.* Vibration responses analysis of an elastic-support cantilever beam with crack and offset boundary. Mech. Sys. Signal Proc. 2017. Vol. 95. P. 205–218. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.03.032
22. *Andreaus U., Casini P., Vestroni F.* Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. Int. J. Non-Linear Mech. 2007. Vol. 42. P. 566–575. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.08.007
23. *Bovsunovskii A. P., Bovsunovskii O. A.* Application of nonlinear resonances for the diagnostics of closing cracks in rod like elements. Strength of Mater. 2010. Vol. 42. P. 331–342. https://doi.org/10.1007/s11223-010-9222-4
24. *Bovsunovsky A. P., Surace C.* Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack. J. Sound Vib. 2005. Vol. 288. P. 865–886. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.038
25. *Pugno N., Surace C.* Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks. J. Sound Vib. 2000. Vol. 235. P. 749–762. https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.2980
26. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. New York: Pergamon Press, 1982. 630 p.
27. *Caddemi S., Calio I.* Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler- Bernoulli beam with multiple open cracks. J. Sound Vib. 2009. Vol. 327. P. 473–489. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.008
28. *Biondi B., Caddemi S.* Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities. Int. J. Solids Struct. 2005. Vol. 42. P. 3027–3044. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.09.048
29. *Mikhlin Y. V., Avramov K. V.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. Appl. Mech..Rev. 2010. Vol. 63. p. 060802. https://doi.org/10.1115/1.4003825
30. *Avramov K. V., Mikhlin Y. V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Appl. Mech. Rev. 2013. Vol. 65. p. 020801. https://doi.org/10.1115/1.4023533
31. *Mikhlin Y. V., Avramov K. V.* Nonlinear normal modes of vibrating mechanical systems: 10 years of progress. Appl. Mech. Rev. 2024. https://doi.org/10.1115/1.4063593
32. *Renson L., Kerschen G., Cochelin B.* Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. J Sound Vib. 2016. Vol. 364. P. 177–206. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.033
33. *Peeters M., Viguié R., Sérandour G., Kerschen G., Golinval J.C.* Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. Mech. Sys. Sign. Proc. 2009. Vol. 23. P. 195–216. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.003
34. *Avramov K.* Nonlinear normal modes of multi-walled nanoshells with consideration of surface effect and nonlocal elasticity. Int. J. Non-linear Mech. 2024. Vol. 159. p. 104622. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104622
35. *Villadsen J. V., Stewart W. E.* Solution of boundary – value problems by orthogonal collocation. Chem. Eng. Sci. 1967. Vol. 22. P. 1483–1501. https://doi.org/10.1016/0009-2509(67)80074-5
36. Seydel R. Nonlinear computation. Int. J. Bifurcat. Chaos. 1997. V. 7. Pp. 2105-2126. https://doi.org/10.1142/S0218127497001564
37. *Doedel E., Keller H. B., Kernevez J. P.* Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensions. Int. J. Bifurcat. Chaos. 1991. Vol. 1. P. 493–520. https://doi.org/10.1142/s0218127491000397

Отримано 11.06.2024,
в остаточному варіанті 06.12.2024