УДК 629.762 https://doi.org/10.15407/itm2023.03.018

С. В. СЮТКІНА-ДОРОНІНА

ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГРАМИ КЕРУВАННЯ КУТОМ ТАНГАЖА ТВЕРДОПАЛИВНОГО РАКЕТНОГО ОБ'ЄКТА

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля 15, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: svetasut2012@gmail.com

Проведено аналіз тенденцій покращення тактико-технічних характеристик керованих ракетних об'єктів (КРО) з маршовими ракетними двигунами на твердому паливі (РДТП), виявлено особливості та вимоги, що пред'являються до траєкторій польоту, проєктних параметрів, програм керування. У рамках теорії оптимального управління сформульовано комплексну задачу спільної оптимізації проєктних параметрів і програм керування рухом ракетного об'єкта. Отримав подальший розвиток підхід до формування програм керування рухом ракетного об'єкта у вигляді поліномів, що дозволило звести задачу теорії оптимального управління до більш простої задачі нелінійного математичного програмування. Запропонований підхід до побудови програм керування використовується на початковому етапі проєктування для формування широкого діапазону траєкторій польоту керованих об'єктів. Використовується методичне забезпечення для оптимізації проєктних параметрів і програм керування рухом КРО схеми «качка» за критерієм дальності балістичних і аеробалістичних траєкторій. Відзначено, що дальність польоту КРО істотно залежить від значень обраних проєктних параметрів, параметрів траєкторії та програм керування, що оптимізуються. У зв'язку з цим оптимізація обраних (та, можливо, інших) параметрів при вирішенні конкретних цільових задач представляється необхідним початковим етапом проєктування КРО. Визначено оптимальні у класі поліноміальних функцій програми зміни в часі кута тангажа за критерієм дальності польоту для досліджуваних траєкторій КРО з вертикальним стартом, коли число Маха досягає різних значень. Аналіз результатів оптимізації різних траєкторій показав, що оптимальною програмою у класі поліноміальних функцій на активній ділянці траєкторії з вертикальним стартом є лінійна залежність кута тангажа від часу. Розроблений пакет прикладних програм методичного забезпечення дозволяє на початковому етапі проєктування об'єктів ракетної техніки з необхідною для проєктних досліджень точністю визначати оптимальні в заданому класі функцій програми керування рухом, раціональні значення проєктних параметрів та основних характеристик керованих ракетних об'єктів для різних аеродинамічних конструкцій та схем польоту. Це дає можливість проводити аналіз альтернативних проєктних рішень і, таким чином, дозволяє підвищити якість рішення задач початкового етапу проєктування та скоротити терміни і витрати на проведення проєктних робіт при створенні нових зразків ракетної техніки.

Ключові слова*: керований ракетний об'єкт, маршовий ракетний двигун на твердому паливі, початковий етап проєктування, проєктні параметри, параметри траєкторії, програми керування рухом, цільовий функціонал, методичне забезпечення оптимізації.*

This paper analyzes the trends in the improvement of the performance characteristics of guided missiles with solid-propellant sustainer engines and identifies the features and requirements for flight trajectories, design parameters, and control programs. Within the framework of the optimal control theory, the comprehensive problem of simultaneous optimization of a missile's design parameters and control systems is formulated. An approach to the formation of missile flight control programs in the form of polynomials is developed further, thus making it possible to reduce the optimal control theory problem to a simpler problem of nonlinear mathematical simulation. The proposed approach to control program development is used at the initial design stage to form a wide range of guided missile trajectories. Use is made of a methodology for the ballistic and aeroballistic flight range optimization of the design parameters and flight control programs of a canard missile. The missile flight range depends essentially on the values of the design and trajectory parameters and control programs chosen for optimization. Because of this, the optimization of the chosen parameters (maybe, other parameters too) in the solution of specific target problems seems to be the indispensable initial stage of missile design. For the considered missile trajectories with a vertical launch where the Mach number takes different values, optimal programs of pitch time variation that maximize the flight range are determined. The analysis of the optimization results for different trajectories shows that the optimal program in active flight with a vertical launch is the linear time dependence of the pitch angle. The application package developed allows one to determine flight control programs optimal in a given class of functions and advisable design parameters and basic performance characteristics of guided missiles for various aerodynamic designs and flight schemes as early as at the initial design stage to an accuracy required for design studies. This makes it possible to analyze design alternatives, thus improving the quality of solution of problems arising at the initial design stage and reducing the time and the cost of design work on new missiles.

Keywords*: guided missile, solid-propellant sustainer engine, initial design stage, design parameters, trajectory parameters, flight control programs, objective functional, optimization methodology.*

Вступ. Однією з актуальних задач, що стоять перед ракетно-космічною галуззю України, є проєктування, розробка та створення нових керованих ракетних об'єктів (КРО) [1] – [5], призначених для вирішення різних цільових задач.

Сучасний етап розвитку ракетної техніки характеризується значним ускладненням всіх типів нових ракетних об'єктів, що проєктуються, і, відповідно, значними витратами часу і ресурсів на їх створення. При цьому слід зазначити, що невірні (нераціональні) рішення, прийняті на початковому етапі проєктування КРО, призводять в кінцевому підсумку до зниження ефективності виконання цільових задач, зростання витрат на розробку та виготовлення КРО, збільшення термінів його створення [1] – [5].

Питанням проєктування та розробки КРО приділено велику увагу у вітчизняній [1], [2], [5] та зарубіжній науково-технічній літературі [3], [4]. У [1] – [5] наведено аналіз процесу проєктування КРО, обговорено аеродинамічні методи проєктування та технології крилатих та безкрилих конфігурацій, розглянуто методи та технології концептуального проєктування прямоточних і турбореактивних ракетних двигунів, проаналізовано методи для прогнозування дальності дії КРО, швидкості та часу польоту, а також маневреності та відхилення від осі прицілювання.

Далі, як КРО розуміються одноступеневі ракети різного призначення, що застосовуються для доставки головної частини в задану точку простору з необхідними значеннями кінематичних параметрів руху. Як силова установка на КРО розглядається ракетний двигун на твердому паливі (РДТП).

Для успішного вирішення задачі оптимізації проєктних параметрів і програм керування КРО важливе значення набуває розроблене методичне забезпечення [5], [6], яке дозволяє оперативно з необхідною для проєктних досліджень точністю визначити: оптимальні значення параметрів, що оптимізуються, основні характеристики та програми керування рухом, з урахуванням особливостей цільового застосування КРО.

В останні роки зростає інтерес до ракет, які не тільки ефективні за технічними характеристиками, але і за доступністю та дешевизною. Аналіз процесу проєктування доводить, що вартість виготовлення ракети залежить від стартової маси і дальності її польоту. На початковому етапі проєктування задано стартову масу та масу корисного вантажу ракети, тому вартість виробництва альтернативних варіантів ракет слід вважати приблизно однаковою. Таким чином, оптимізація проєктних параметрів і програм керування рухом ракетного об'єкта проводиться за умови максимуму цільового функціонала дальності польоту – відстані, на яку доставляється маса корисного вантажу в задану точку простору з необхідними значеннями кінематичних параметрів руху в кінці польоту.

Мета статті – аналіз тенденцій покращення тактико-технічних характеристик КРО з РДТП, виявлення особливостей та вимог, що пред'являються до траєкторій польоту, проєктних параметрів, програм керування. Використання методичного забезпечення для оптимізації проєктних параметрів і програм керування рухом КРО схеми «качка», що може здійснювати польоти за балістичними і аеробалістичними траєкторіями. Визначення оптимальної програми зміни в часі кута тангажа за критерієм дальності польоту для досліджуваних траєкторій КРО з вертикальним стартом, коли число Маха досягає різних значень.

Тенденції у розвитку тактико-технічних характеристик ракетних об'єктів. Як показує аналіз розроблених і створених твердопаливних ракет, у розвитку тактико-технічних характеристик прослідковуються тенденції збільшення максимальної дальності польоту, яка може бути досягнута за рахунок поліпшення масово-габаритних і енергетичних характеристик ракет, зокрема [5]:

– шляхом збільшення запасу твердого ракетного палива (ТРП) і відповідно маси заряду РДТП – ракета WS-3A (Китайська Народна Республіка (КНР)) [7];

– використання високоенергетичних сумішевих твердих ракетних палив – ракета LORA (Ізраїль) [8];

– застосування в конструкціях відсіків ракет і РДТП високоміцних конструкційних матеріалів і перспективних конструктивно-технологічних рішень – ракета GMLRS M+ (США) [9];

– використання перспективних аеродинамічних схем ракет з поліпшеною аеродинамічною якістю, зокрема ракет із крилами малого подовження – ракета WS-64 (КНР) [7];

Характерними особливостями перспективних КРО і вимогами до них є:

– висока тягоозброєнність на початковій ділянці польоту з метою забезпечення можливості керування ракетою на цій ділянці аеродинамічними органами керування;

– розрахунковий час роботи маршового РДТП, який залежить від швидкості горіння ТРП, тиску в камері згоряння, діаметра ракети і максимально припустимої товщини зводу заряду, при якій забезпечується не ерозійне горіння ТРП;

– можливість застосування дворежимного маршового РДТП з метою збільшення часу його роботи, що призводить, як показують розрахунки, до збільшення дальності польоту ракети;

– використання як балістичних, аеробалістичних, так і комбінованих типів траєкторій польоту;

– вимога до керування рухом ракет за допомогою аеродинамічних рулів (АДР), що приводяться в рух рульовими приводами по командах, сформованих інтегрованою інерційно супутниковою системою управління;

– формування траєкторії польоту з забезпеченням необхідного значення швидкісного напору на максимальній висоті, при якому може бути здійснена можливість керування ракетою за допомогою АДР на цій ділянці польоту.

Для успішного проведення проєктних робіт з урахуванням розглянутих тенденцій розвитку перспективних ракет доцільно сформулювати комплексну задачу спільної оптимізації проєктних параметрів і програм керування рухом КРО.

Постановка задачі. В постановці комплексної задачі спільної оптимізації проєктних параметрів і програм керування КРО, як задачі теорії оптимального управління, цільовим функціоналом є дальність польоту $L = L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$, на яку потрібно доставити необхідну масу головної частини $m_{ГЧ}$ при заданій стартовій масі КРО m_0. Цільовий функціонал $I(\bar{p}_{opt}, \bar{u}_{opt}, \bar{x}) = \max\limits_{\bar{p},\bar{u}} L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$ максимізується в процесі вибору параметрів, що оптимізуються (вектор $\bar{p}_{opt}$), і програм керування рухом (вектор $\bar{u}_{opt}$).

До складу початкової інформації (компоненти вектора $\bar{x}$) входять: дані тактико-технічного завдання, що визначають цільову задачу; умови пуску КРО; обмеження на траєкторію польоту, габаритно-масові характеристики КРО в цілому, його окремих підсистем і елементів; фізико-механічні характеристики використаних конструкційних матеріалів; характеристики твердого ракетного палива; невраховані маси елементів, підсистем, які не включені в математичну модель для розрахунку основних характеристик КРО.

Як параметри, що оптимізуються, (компоненти вектора $\bar{p}$) розглядаються: основні проєктні параметри, що дозволяють на початковому етапі проєктування визначати габаритно-масові і енергетичні характеристики КРО в цілому і РДТП, що входить до його складу; параметри, які спільно з програмами керування рухом, що оптимізуються, визначають траєкторію КРО і значення цільового функціонала.

До складу основних проєктних параметрів КРО включено коефіцієнт початкової тягоозброєності ν_p, відносна кінцева маса μ_k, що визначаються загальноприйнятими співвідношеннями:

$$\nu_p = \frac{m_0 \cdot g_0}{P_{pust}}; \quad \mu_k = \frac{m_0 - m_m}{m_0} = \frac{m_k}{m_0},$$

де m_0, m_k – стартова і кінцева маси КРО; g_0 – прискорення вільного падіння на поверхні Землі; m_m – повний запас палива маршового РДТП; P_{pust} – тяга в пустоті маршового РДТП на основному режимі роботи.

До складу проєктних параметрів РДТП, які також входять до вектора параметрів, що оптимізуються, $\bar{p}$ входять: тиск в камері згоряння на основному режимі його роботи p_k, діаметр зрізу сопла D_a, кут піврозхилу на зрізі сопла β_a, відношення тяги наприкінці основного режиму роботи до тяги на початку основного режиму роботи РДТП K_{pd}, повний час роботи маршового РДТП t_Σ, що визначається залежно від коефіцієнта початкової тягоозброєності ν_p.

Склад параметрів траєкторії, що входять у вектор параметрів, що оптимізуються, $\bar{p}$, залежить від обраної схеми польоту і може включати наступні параметри: тривалість вертикальної ділянки руху КРО t_{vert} при вертикальному старті; початковий кут нахилу КРО при похилому старті φ_{cm}; кут тангажа наприкінці активної ділянки траєкторії φ_{AYT}; кут атаки $\alpha_{ПУТj}$ на пасивній ділянці траєкторії та інші.

Компоненти вектора програм керування рухом КРО $\bar{u} = \bar{u}(\bar{p},t)$ розглядаються, як:

– програми зміни в часі кута тангажа $\varphi_{пр\ j}(\bar{p},\bar{y},t)$ на активній (з працюючим РДТП) і пасивних (з непрацюючим РДТП) ділянках траєкторії, де $\bar{y}$ – вектор фазових координат, що визначає положення КРО в просторі;

– програми зміни в часі тяги $P_{пр}(\bar{p},t)$ і секундної витрати продуктів згоряння твердого ракетного палива $\dot{m}_c(\bar{p},t)$ РДТП.

Програми керування рухом на різних ділянках траєкторії задаються у вигляді поліномів:

$$u_{пр\ j}(\bar{p},\bar{y},t) = \sum_{i=0}^{n} A_{ji}(\bar{p},\bar{y}) \cdot t^i, \tag{1}$$

де j – номер ділянки траєкторії; n – степінь полінома.

В (1) значення коефіцієнтів A_{ji} визначаються залежно від початкових даних, розглянутої j-ої ділянки траєкторії, вектора параметрів $\bar{p}$, що оптимізуються, і поточних значень вектора фазових координат $\bar{y}$, що визначають положення КРО в просторі. Такий підхід до вибору програм керування дозволив звести задачу теорії оптимального керування до більш простої задачі нелінійного математичного програмування з обмеженнями у вигляді рівностей і диференціальних зв'язків, в якій цільовий функціонал постає у вигляді цільової функції, що залежить тільки від вектора оптимізованих параметрів $\bar{p}$. В цьому випадку комплексна задача спільної оптимізації проєктних параметрів і програм керування формулюється таким чином: необхідно визначити значення вектора параметрів $\bar{p} = \bar{p}_{opt}$, що забезпечує максимальне значення цільової функції

$$I\left(\bar{p}_{opt}, \bar{x}\right) = \max_{\bar{p}} L\left(\bar{p}, \bar{x}\right) \tag{2}$$

при обмеженнях:

– на області зміни параметрів, що оптимізуються, $\bar{p}$ і початкових даних $\bar{x}$:

$$\bar{p} \in \tilde{P}^m \subset P^m, \quad \bar{x} \in \tilde{X}^k \subset X^k; \tag{3}$$

– на траєкторію польоту і програми керування КРО:

$$\begin{array}{l} t_{vert} = t_{vert}^{mp}; \quad H_{\max} = H_{\max}^{mp}, \; Q_{H_{\max}} \ge Q_{H_{\max}}^{\min}, \; \alpha \le \alpha_{\max}, \\ \varphi_c = \varphi_c^{mp}; \quad \dfrac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{x}, \bar{p}); \; \bar{y} \in \tilde{Y}^s \subset Y^s \end{array} ; \tag{4}$$

– на габаритно-масові характеристики КРО:

$$\begin{array}{l} m_0(\bar{x}, \bar{p}) = m_0^{mp}, \; m_{ГЧ}(\bar{x}, \bar{p}) = m_{ГЧ}^{mp}, \\ L_{УРО} = L_{УРО}^{mp}, \; L_{ГЧ} = L_{ГЧ}^{mp}, \; D_{УРО}(\bar{x}, \bar{p}) = D_{УРО}^{mp}, D_a(\bar{x}, \bar{p}) = D_a^{mp}. \end{array} \tag{5}$$

У співвідношеннях (2) – (5) використано такі позначення: $\bar{x} = (x_i), i = \overline{1,k}$ – вектор початкових даних, що є елементом дійсного векторного простору X^k; $\bar{p} = (p_i), i = \overline{1,m}$ – вектор параметрів, які оптимізуються (проєктних параметрів КРО і параметрів траєкторії), що є елементом дійсного векторного простору P^m; $\tilde{P}^m, \tilde{X}^k$ – замкнуті області в дійсних векторних просторах P^m, X^k, в яких можуть набувати значень вектори $\bar{p}, \bar{x}$, відповідно; $\bar{y} = (y_i), \; i = \overline{1,s}$ – вектор фазових координат, що визначає положення КРО в просторі, та який є елементом векторного простору Y^s; $\tilde{Y}^s$ – замкнута область у векторному просторі Y^s, у якій може набувати значень вектор $\bar{y}$; t_{vert}, t_{vert}^{mp} – розрахункова і припустима тривалості вертикальної ділянки польоту; $H_{\max}, H_{\max}^{mp}$ – розрахункова і максимально припустима висоти польоту КРО; $Q_{H_{\max}}, Q_{H_{\max}}^{\min}$ – розрахунковий і мінімально-припустимий швидкісні напори на максимальній висоті польоту $H = H_{\max}$; $\alpha, \alpha_{\max}$ – розрахунковий і максимально припустимий кути атаки на всіх ділянках траєкторії; $m_0(\bar{x}, \bar{p}), m_0^{mp}$ – розрахункова і необхідна стартові маси КРО; $m_{ГЧ}(\bar{x}, \bar{p}), m_{ГЧ}^{mp}$ – розрахункова і необхідна маси головної частини (ГЧ);

$L_{УРО}, L_{УРО}^{тр}$ – розрахункова і необхідна довжини КРО; $L_{ГЧ}, L_{ГЧ}^{тр}$ – розрахункова і необхідна довжини ГЧ; $D_{УРО}(\bar{x}, \bar{p})$, $D_{УРО}^{тр}$ – розрахунковий і необхідний діаметри КРО; $D_a(\bar{x}, \bar{p})$, $D_a^{тр}$ – розрахунковий і необхідний діаметри зрізу сопла.

Математичну модель КРО представлено у вигляді оператора $\tilde{F} = R(z)$ з областю визначення на множині $Z = \tilde{X}^k \times \tilde{P}^m$ і областю значень на множині F, що співставляє кожному елементу множини $z(\bar{x}, \bar{p}) \in Z$ множину вихідних характеристик КРО $\tilde{F} \subset F$.

Вихідними даними, одержаними в результаті рішення комплексної задачі, є: значення цільової функції L (дальності польоту КРО); оптимальне значення вектора параметрів, що оптимізуються, $\bar{p}_{opt}$; програми керування рухом КРО $\bar{u}_{opt\ j}(t)$ на різних ділянках траєкторії, габаритно-масові характеристики КРО в цілому, основних його елементів і підсистем окремо; характеристики міцності, аеродинамічні, балістичні, енергетичні характеристики КРО.

Структура математичної моделі, послідовність розрахунку цільової функції при оптимізації проєктних параметрів та програм керування КРО наведено в [5], [6], [10]. Математичні моделі функціонування ракетного об’єкта з твердопаливними двигунами, що використовуються при проєктуванні, досить широко висвітлені в технічній літературі [1] – [4], [11], [12] та розглянуті раніше в [5],[6].

У [5] наведено математичну модель для визначення на початковому етапі проєктування аеродинамічних характеристик одноступінчастих КРО різних класів. Ця математична модель дозволяє в пов’язаній з КРО системі координат визначити: коефіцієнт поздовжньої сили (лобового опору) C_x залежно від числа Маха M, висоти польоту H та кута атаки α; коефіцієнт підйомної сили C_y залежно від числа Маха M і кута атаки α. Початковими даними, що використовуються при визначенні аеродинамічних характеристик КРО, є: геометричні параметри ГЧ, що визначають її аеродинамічне компонування; геометричні характеристики крил і оперення; габаритні характеристики РДТП, обумовлені залежно від значень основних проєктних параметрів; діапазони зміни режимних параметрів руху КРО (числа Маха M, кута атаки α і висоти польоту H), для яких визначаються аеродинамічні характеристики КРО.

В [1] – [5], [11], [12] наведено співвідношення для визначення діючих на КРО сил та прискорень в залежності від програми керування рухом КРО на різних ділянках траєкторії, систему диференційних рівнянь руху центра мас КРО та кінематичні параметри руху в проєкціях на осі земної системи координат.

У [5] розроблено комплексну математичну модель КРО, що переведена в спеціальні алгоритми для комп’ютерного моделювання процесу функціонування ракети. Комплексна математична модель КРО і моделюючі алгоритми є основою методичного і програмного забезпечення для оптимізації на початковому етапі проєктування основних характеристик КРО з маршовим РДТП.

Далі розглянуто програми зміни в часі кута тангажа, які дали можливість звести здачу теорії оптимального управління до задачі нелінійного математичного програмування [5], [6], [10].

Програми керування кутом тангажа ракетного об’єкта. При оптимізації параметрів і програм керування розглядаються балістичні і аеробалістичні траєкторії польоту КРО, які можуть бути реалізовані як з вертикальним, так і похилим видами стартів [5], [6], [10].

У числі параметрів $\overline{p}$, що оптимізуються, розглядаються t_{vert} – тривалість вертикальної ділянки польоту при вертикальному старті, φ_{cm} – кут тангажа при похилому старті.

Визначаються різні програми керування рухом КРО для різних схем польоту за балістичними і аеробалістичними траєкторіями.

Узагальнена схема польоту КРО за балістичними і аеробалістичними траєкторіями наступна:

– активна ділянка траєкторії (АДТ) (із працюючим РДТП), що включає вертикальний політ при вертикальному старті і ділянку розвороту КРО у вертикальній площині, наприкінці якої програма зміни кута тангажа $\varphi_{np}(t)$ забезпечує вихід на заданий кут тангажа $\varphi_{АУТ} = \varphi_{АУТ}^{mp}$;

– перша пасивна ділянка траєкторії (ПДТ) (з непрацюючим РДТП), на якій здійснюється вихід КРО на потрібний кут атаки $\alpha_{ПУТ\,1} = \alpha_{ПУТ\,1}^{mp}$ протягом потрібного проміжку часу $t_{ПУТ\,1}^{mp}$ з урахуванням обмежень, що накладаються на цю ділянку траєкторії після закінчення роботи маршового РДТП;

– наступні j-і пасивні ділянки траєкторії (з непрацюючим РДТП), на яких програми керування $\varphi_{np\ j}(t)$ будуються з урахуванням заданих вимог і обмежень.

Програми керування кутом тангажа КРО на всіх ділянках балістичних і аеробалістичних траєкторій задаються поліномами.

На ділянці вертикального руху програма керування кутом тангажа $\varphi_{np\ j}(t)$ має такий вид

$$\varphi_{np}(t) = const = \frac{\pi}{2}.$$

На АДТ у якості програми керування рухом можуть бути використані лінійна $n=1$, квадратична $n=2$ і кубічна $n=3$ залежності кута тангажа від часу:

$$\varphi_{np}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot t^i. \qquad (6)$$

Далі наведені умови, які повинні бути виконані для кожної з можливих трьох видів програм керування на АДТ, і співвідношення, що дозволяють для цих програм визначати значення коефіцієнтів A_i, $i = \overline{0,n}$ у поліномі (6).

Після закінчення вертикальної ділянки польоту при $t = t_{vert}$ початкові умови для програми зміни кута тангажа такі:

$$\varphi_{vert} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

де φ_{vert} – кут тангажа наприкінці вертикальної ділянки руху. У випадку похилого старту КРО замість кута тангажа φ_{vert} необхідно задавати величину кута похилого старту φ_{cm}.

Наприкінці АДТ при $t = t_{АУТ}$, де $t_{АУТ}$ – повний час роботи маршового РДТП, умови для вибору програми керування такі:

$$\varphi_{АУТ} = \varphi_{АУТ}^{тр}$$

$$\alpha_{АУТ} = 0,$$

де $\varphi_{АУТ}^{тр}$ – потрібний кут тангажа наприкінці АДТ, який входить до складу параметрів $\bar{p}$, що оптимізуються; $\alpha_{АУТ}$ – кут атаки наприкінці АДТ.

Коефіцієнти A_0, A_1 в (6) для лінійної залежності кута тангажа від часу визначаються за співвідношеннями:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{vert} = \phi_{vert}; \\ A_0 + A_1 \cdot t_{АУТ} = \phi_{АУТ}^{тр}; \end{cases}$$

$$A_0 = \phi_{vert} - A_1 \cdot t_{vert},$$

$$A_1 = \frac{\phi_{vert} - \phi_{АУТ}^{тр}}{t_{vert} - t_{АУТ}}.$$

Коефіцієнти в (6) для квадратичної параболи визначаються такою системою рівнянь, лінійної щодо коефіцієнтів $\mathrm{A_i}, \mathrm{i} = \overline{0,2}$:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{vert} + A_2 \cdot t_{vert}^2 = \varphi_{vert}, \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot t_{vert} = 0, \\ A_0 + A_1 \cdot t_{АУТ} + A_2 \cdot t_{АУТ}^2 = \varphi_{АУТ}^{тр}, \end{cases}$$

у результаті рішення якої отримані співвідношення:

$$A_0 = \varphi_{vert} - (A_1 \cdot t_{vert} + A_2 \cdot t_{vert}^2),$$

$$A_1 = -2 \cdot A_2 \cdot t_{vert},$$

$$A_2 = \frac{\varphi_{vert} - \varphi_{АУТ}^{тр}}{\left(t_{vert}^2 - t_{АУТ}^2\right) - 2 \cdot t_{vert} \cdot \left(t_{vert} - t_{АУТ}\right)}.$$

Коефіцієнти в (6) для кубічної параболи визначаються в результаті рішення наступної системи, лінійної щодо коефіцієнтів $A_i, i = \overline{0,3}$:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{vert} + A_2 \cdot t_{vert}^2 + A_3 \cdot t_{vert}^3 = \varphi_{vert}, \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot t_{vert} + 3 \cdot A_3 \cdot t_{vert}^2 = 0, \\ A_0 + A_1 \cdot t_{АУТ} + A_2 \cdot t_{АУТ}^2 + A_3 \cdot t_{АУТ}^3 = \varphi_{АУТ}^{тр}. \end{cases}$$

За наведеними співвідношеннями можна визначити тільки три коефіцієнти із чотирьох. Четвертий коефіцієнт (нехай це буде A_3) визначається в результаті розв'язку крайової задачі на цій ділянці траєкторії за умови забезпечення нульового кута атаки наприкінці АДТ. У цьому випадку система рівнянь для визначення трьох коефіцієнтів програми керування має такий вигляд:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{vert} + A_2 \cdot t_{vert}^2 = \varphi_{vert} - A_3 \cdot t_{vert}^3, \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot t_{vert} = -3 \cdot A_3 \cdot t_{vert}^2, \\ A_0 + A_1 \cdot t_{АУТ} + A_2 \cdot t_{АУТ}^2 = \varphi_{АУТ}^{mp} - A_3 \cdot t_{АУТ}^3. \end{cases}$$

Слід зазначити, що тип програми керування кутом тангажа із трьох запропонованих варіантів вибирається або з умови максимуму дальності польоту КРО, або з умов можливості реалізації обраного типу програми для конкретного КРО [5], [6], [10].

Програми керування $\varphi_{пр\ j}(t)$ на j-тих ПДТ будуються з урахуванням заданих вимог і обмежень, які можуть бути в складі вектора параметрів $\overline{p}$, що оптимізуються.

Ілюстративний приклад. Використано методичне забезпечення для визначення оптимальної у класі поліноміальних функцій програми зміни в часі кута тангажа на активній ділянці траєкторії для різних схем польоту КРО з вертикальним стартом за критерієм дальність.

Для цього, використовуючи метод конфігурацій нульового порядку, проведено оптимізацію вектора $\overline{p}$, компоненти якого включають основні проєктні параметри КРО і параметри траєкторії. Параметри вектора $\overline{p}$, що оптимізуються, вибираються за умови максимуму цільової функції дальності польоту $L(\overline{p})$.

Як КРО розглядається одноступінчатий керований ракетний об’єкт з масою ГЧ $m_{гч}$ =250 кг, з різною стартовою масою: $m_0 = 945$ кг, коли число Маха досягає значень М=[3÷4]; $m_0 = 1335$ кг, коли число Маха досягає значень М=[5÷6]; $m_0 = 1950$ кг, коли число Маха досягає значень М=[6÷7].

Як силова установка на КРО використовується РДТП з наступними характеристиками умовного ТРП: густина ТРП $\rho = 1730$ кг / м^3, температура горіння ТРП $T_g = 3767$ К, показник ізоентропи продуктів згоряння ТРП k =1,19, газова постійна продуктів згоряння R_g =336 Дж/(кг·К).

У розрахунках використовується степенева залежність швидкості горіння ТРП від тиску, яка визначається співвідношенням [5], [11], [12]:

$$u = u_1 \cdot (p_k)^{\nu},$$

де p_k – тиск у камері згоряння маршового РДТП; u_1 =0,001 м/с, ν =0,35 – параметри, що визначають залежність швидкості горіння ТРП від тиску у камері згоряння РДТП.

При оптимізації параметрів КРО та параметрів траєкторії були прийняті наступні початкові умови, за яких здійснюється старт КРО: широта точки старту $\varphi_{ст} = 40$ град., азимут пуску $\phi = 40$ град., висота точки старту $H_{ст} = 10$ м.

Аеродинамічна схема «качка» сформована з головної частини, що представляє собою поєднання оживальної і циліндричної форм, циліндричної частини, що включає перехідний і хвостовий відсіки, і корпус камери згоряння маршового РДТП. На циліндричній частині ГЧ розташовано чотири АДР, що забезпечують стабілізацію та керування ракетним об’єктом у польоті, на хвостовій частині КРО встановлено чотири стабілізатора.

Повна довжина ГЧ прийнята рівною $L_{гч}$ =2,992 м, довжина оживальної частини ГЧ $L_{ож}$ =0,867 м, довжина циліндричної частини ГЧ $L_{ц}$ =2,125 м. Камера згоряння РДТП, перехідний і хвостовий відсіки КРО виконано зі сталі. Діаметр циліндричної частини корпусу КРО прийнято рівним D_{UO} =0,410 м.

В процесі оптимізації визначаються проєктні параметри КРО в зазначених діапазонах: коефіцієнт початкової тягоозброєності, що змінюється в діапазоні $[0,07 \le \nu_p \le 0,23]$; тиск у камері згоряння маршового РДТП, що змінюється в діапазоні [65 кгс/см^2 $\le p_k \le$ 100 кгс/см^2]; діаметр зрізу сопла маршового РДТП, що змінюється в діапазоні [0,33 м $\le D_a \le$ 0,39 м].

Для різних значень числа Маха в залежності від стартової маси m_0 та маси ГЧ $m_{гч}$ визначаються повний запас палива маршового РДТТ m_m і відносна кінцева маса КРО μ_k, а сумарний час роботи маршового РДТП t залежно від коефіцієнта початкової тягоозброєності КРО в пустоті ν_p.

Оптимізація параметрів траєкторії та визначення оптимальної програми керування кутом тангажа в часі на активній ділянці траєкторії здійснюється для досліджуваних схем польоту з вертикальним стартом, коли число Маха досягає різних значень:

– **траєкторія 1** – балістична траєкторія без обмеження на швидкісний напір на максимальній висоті польоту керованої ракети;

– **траєкторія 2** – балістична траєкторія з обмеженням на швидкісний напір на максимальній висоті польоту керованої ракети;

– **траєкторія 3** – аеробалістична траєкторія;

– **траєкторія 4** – аеробалістична траєкторія типу «ЖУК».

Далі наведено програми керування рухом КРО за балістичними і аеробалістичними траєкторіями, що досліджуються.

Програми керування кутом тангажа в часі за траєкторією 1 (балістична траєкторія без обмеження на швидкісний напір на максимальній висоті польоту КРО)**:**

– при вертикальному старті політ з постійним у часі кутом тангажа $\varphi_{vert} = 90^\circ$ протягом заданого часу t_{vert};

– програма керування рухом КРО забезпечує політ з постійним кутом тангажа $n = 0$ або з лінійною $n = 1$, або з квадратичною $n = 2$, або з кубічною $n = 3$ залежністю тангажа від часу до кінця АДТ, де коефіцієнти A_i, $i = \overline{0,n}$ у поліномі (6) вибираються за умови забезпечення необхідного кута тангажа $\varphi_{АУТ}$ наприкінці АДТ;

– перша пасивна ділянка траєкторії (ПДТ1), де програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, коефіцієнти якої вибираються за умови виходу на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ1} = 0$ протягом заданого часу $t_{ПУТ1}$;

– на другій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ2) політ КРО до максимальної висоти $H_{\max}$, при цьому програма зміни кута тангажа забезпечує рух з нульовим кутом атаки $\alpha_{ПУТ2} = 0$;

– на третій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ3) рух КРО з нульовим кутом атаки $\alpha_{ПУТ3} = 0$ до зіткнення з Землею.

Оптимальні параметри балістичної траєкторії без обмеження на швидкісний напір наведено в таблиці 1.

Таблиця 1
Оптимальні значення параметрів траєкторії без обмеження на швидкісний напір з вертикальним стартом КРО, коли число Маха досягає М=[6÷7]

Характеристика	Розмірність	Діапазон значення	Оптимальне значення	Примітка
$\varphi_{АУТ}$	град.	[32÷45]	34,27	Необхідний кут тангажа наприкінці АДТ
$t_{ПУТ1}$	с	[5÷15]	5	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ1
L	км	359,995		Дальність польоту

Програми керування кутом тангажа за траєкторією 2 (балістична траєкторія з обмеженням на швидкісний напір на максимальній висоті польоту КРО):

– при вертикальному старті політ з постійним у часі кутом тангажа $\varphi_{пр} = \varphi_{vert} = 90^\circ$ протягом заданого часу t_{vert};

– на АДТ програма керування рухом КРО забезпечує політ з постійним кутом тангажа $n = 0$ або з лінійною $n = 1$, або з квадратичною $n = 2$, або з кубічною $n = 3$ залежністю тангажа від часу (6) за умови забезпечення необхідного кута тангажа $\varphi_{АУТ}$ наприкінці АДТ;

– перша пасивна ділянка траєкторії (ПДТ1), де програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, коефіцієнти якої вибираються за умови виходу на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ1} = 0$ протягом заданого часу $t_{ПУТ1}$;

– на другій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ2) політ КРО до максимальної висоти $H_{\max}$, при цьому програма зміни кута тангажа забезпечує вихід на задане мінімально припустиме значення швидкісного напору $Q^{\min}_{H_{\max}}$=50 кгс/м^2;

– третя пасивна ділянка траєкторії (ПДТ3), на якій програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, де коефіцієнти вибираються за умови виходу на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ3} = 0$ протягом заданого часу $t_{ПУТ3}$;

– на четвертій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ4) рух КРО з нульовим кутом атаки $\alpha_{ПУТ4} = 0$ до зіткнення з Землею.

Оптимальні параметри балістичної траєкторії з обмеженням на швидкісний напір наведено в таблиці 2.

Таблиця 2
Оптимальні параметрів балістичної траєкторії з обмеженням на швидкісний напір з вертикальним стартом КРО, коли число Маха досягає М=[6÷7]

Характеристика	Розмірність	Діапазон значення	Оптимальні значення	Примітка
$\varphi_{АУТ}$	град.	[32÷45]	34,27	Необхідний кут тангажа наприкінці АДТ
$t_{ПУТ1}$	с	[5÷15]	5	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ1
$t_{ПУТ3}$	с	[5÷50]	30	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ3
L	км	276,434		Дальність польоту

Програми керування кутом тангажа за траєкторією 3 (аеробалістична траєкторія):

– при вертикальному старті політ з постійним у часі кутом тангажа $\varphi_{пр} = \varphi_{vert} = 90^\circ$ протягом заданого часу t_{vert};

– на АДТ програма керування рухом КРО забезпечує політ з постійним кутом тангажа $n = 0$ або з лінійною $n = 1$, або з квадратичною $n = 2$, або з кубічною $n = 3$ залежністю тангажа від часу (6) за умови забезпечення необхідного кута тангажа $\varphi_{АУТ}$ наприкінці АДТ;

– перша пасивна ділянка траєкторії (ПДТ1), на якій програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, де коефіцієнти вибираються за умови виходу на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ1} = 0$ протягом заданого часу $t_{ПУТ1}$;

– на другій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ2) політ КРО до максимальної висоти $H_{\max}$, при цьому програма зміни кута тангажа забезпечує вихід на задане мінімально припустиме значення швидкісного напору $Q_{H_{\max}}^{\min}$ =50 кгс/м^2;

– третя пасивна ділянка траєкторії (ПДТ3), на якій програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, де коефіцієнти вибираються за умови виходу на заданий кут атаки $\alpha_{ПУТ3} = 0$ протягом заданого часу $t_{ПУТ3}$;

– четверта пасивна ділянка траєкторії (ПДТ4), на якій програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, де коефіцієнти вибираються за умови польоту з постійним кутом атаки $\alpha_{ПУТ4} = \alpha_{ПУТ3}$ до заданої висоти $H_{ПУТ4}$;

– п’ята пасивна ділянка траєкторії (ПДТ5), на якій програма зміни кута тангажа забезпечує політ з лінійною залежністю тангажа від часу, де коефіцієнти вибираються за умови виходу на заданий кут тангажа підльоту до цілі $\varphi_c = -90^\circ$ за проміжок часу $t_{ПУТ5}$;

– на шостій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ6) програма керування рухом КРО забезпечує політ з постійним у часі кутом тангажа $\varphi_c = -90^\circ$ по досягненню висоти підльоту до цілі H_c =1 м.

Оптимальні параметри аеробалістичної траєкторії наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Оптимальні параметри аеробалістичної траєкторії з вертикальним стартом КРО, коли число Маха досягає М=[6÷7]

Характе-ристика	Розмір-ність	Діапазон значення	Оптимальні значення	Примітка
$\varphi_{АУТ}$	град.	[32÷45]	34,27	Необхідний кут тангажа наприкінці АДТ
$t_{ПУТ1}$	с	[5÷15]	5	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ1
$\alpha_{ПУТ3}$	град.	[10÷20]	15	Необхідний кут атаки наприкінці ПДТ3
$t_{ПУТ3}$	с	[5÷50]	30	Тривалість виходу на заданий кут атаки наприкінці ПДТ3
$H_{ПУТ4}$	км	[5 ÷20]	15	Задана висоти польоту наприкінці ПДТ4
$t_{ПУТ5}$	с	[15÷60]	50	Проміжок часу виходу на заданий кут тангажа підльоту до цілі
L	км	418,491		Дальність польоту

Схема польоту за траєкторією 4 (аеробалістична траєкторія типу «ЖУК»):

– вертикальна ділянка руху – політ при роботі РДТП з постійним кутом тангажа $\varphi_{vert} = 90^\circ$ впродовж заданого часу t_{vert};

– вихід на потрібний кут тангажа наприкінці АДТ $\varphi_{АУТ}$;

– вихід на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ1} = 0$ за заданий час $t_{ПУТ1}$ наприкінці першої пасивної ділянки траєкторії (ПДТ1);

– на другій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ2) політ до максимальної висоти $H_{\max}$ з виходом на мінімально припустиме значення швидкісного напору $Q_{H_{\max}}^{\min}$=50 кгс/м^2;

– вихід на нульовий кут атаки $\alpha_{ПУТ3} = 0$ за проміжок час $t_{ПУТ3}$ наприкінці третьої пасивної ділянки траєкторії (ПДТ3);

– на четвертій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ4) політ КРО проводиться з постійним кутом атаки $\alpha_{ПУТ4} = 0$ до заданої висоти $H_{ПУТ4}$;

– на п'ятій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ5) політ КРО з виходом на потрібний кут атаки $\alpha_{ПУТ5} = \alpha_{const}$ за проміжок часу $t_{ПУТ5} = t_{\alpha_{const}}$;

– на шостій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ6) політ КРО по досягненню заданої швидкості $V_{ПУТ6}$;

– на сьомій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ7) після досягнення швидкості $V_{ПУТ6}$ політ КРО з виходом на заданий кут тангажа при підльоті до цілі $\varphi_c = -90^\circ$ за проміжок часу $t_{ПУТ7} = t_{\varphi_c}$;

– на восьмій пасивній ділянці траєкторії (ПДТ8) політ КРО з постійним кутом тангажа $\varphi_c = -90^\circ$ по досягненню висоти підльоту до цілі H_c=1 м.

Оптимальні параметри польоту КРО за траєкторією 4 наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Оптимальні параметри аеробалістичної траєкторії типу «ЖУК» з вертикальним стартом КРО, коли число Маха досягає M=[6÷7]

Характеристика	Діапазон значень	Оптимальні значення	Примітка
$\varphi_{АУТ}$, град.	[32÷45]	34,27	Потрібний кут тангажа наприкінці АДТ
$t_{ПУТ1}$, с	[5÷15]	5	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ1
$t_{ПУТ3}$, с	[5÷12]	5	Тривалість виходу на нульовий кут атаки наприкінці ПДТ3
$H_{ПУТ4}$, км	[25÷54]	53,9	Потрібна висота польоту з нульовим кутом атаки наприкінці ПДТ4
$\alpha_{ПУТ5} = \alpha_{const}$, град.	[7÷14]	11	Потрібний кут атаки наприкінці ПДТ5
$t_{ПУТ5} = t_{\alpha_{const}}$, с	[5÷20]	5	Тривалість виходу на заданий кут атаки наприкінці ПДТ5
$t_{ПУТ7} = t_{\varphi_c}$, с	[45÷70]	62	Проміжок часу виходу на заданий кут тангажа підльоту до цілі
L, км	427,702		Дальність польоту

Для різних значень числа Маха в табл. 5 –7 приведено програми керування кутом тангажа в часі на АДТ для досліджуваних схем польоту КРО за критерієм дальність.

На рис.1 – 3 зображено балістичні і аеробалістичні траєкторії КРО з максимальною дальністю, коли число Маха досягає різних значень.

Таблиця 5
Програми керування кутом тангажа в часі на активній ділянці траєкторії для різних схем польоту КРО з вертикальним стартом за критерієм дальність L (км), коли число Маха досягає значень M=[6÷7]

Траєкторії	Тип програми керування на активній ділянці траєкторії		
	$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{1} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{2} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{3} A_i \cdot t^i$
Траєкторія 1	**359,995**	342,862	335,045
Траєкторія 2	**276,434**	248,329	239,587
Траєкторія 3	**418,491**	367,954	363,320
Траєкторія 4	**427,702**	378,315	374.194

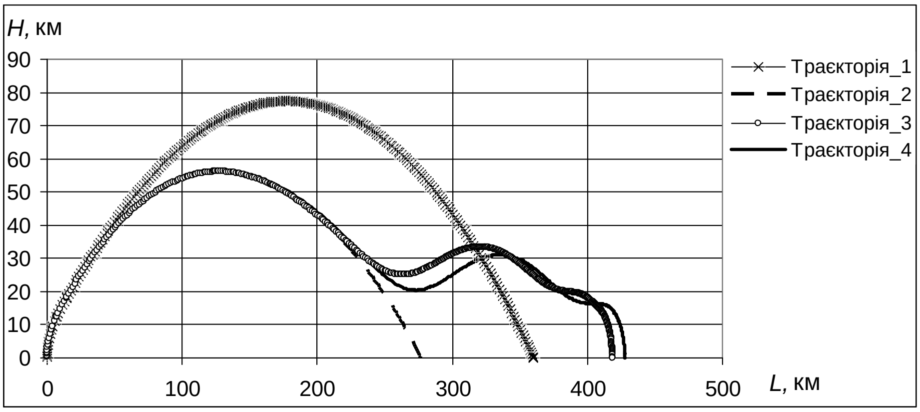

Рис. 1 – Залежність зміни висоти від поточної дальності польоту КРО за балістичними і аеробалістичними траєкторіями з вертикальним стартом, коли число Маха досягає значень М=[6÷7]

Таблиця 6

Програми керування кутом тангажа в часі на активній ділянці траєкторії для різних схем польоту КРО з вертикальним стартом за критерієм дальність L (км), коли число Маха досягає значень М=[5÷6]

Траєкторії	Тип програми керування на активній ділянці траєкторії		
	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{1} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{2} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{3} A_i \cdot t^i$
Траєкторія 1	**217,135**	207	194,049
Траєкторія 2	**220,930**	207,647	197,710
Траєкторія 3	**278,106**	262,453	249,804
Траєкторія 4	**282,167**	265,920	251,404

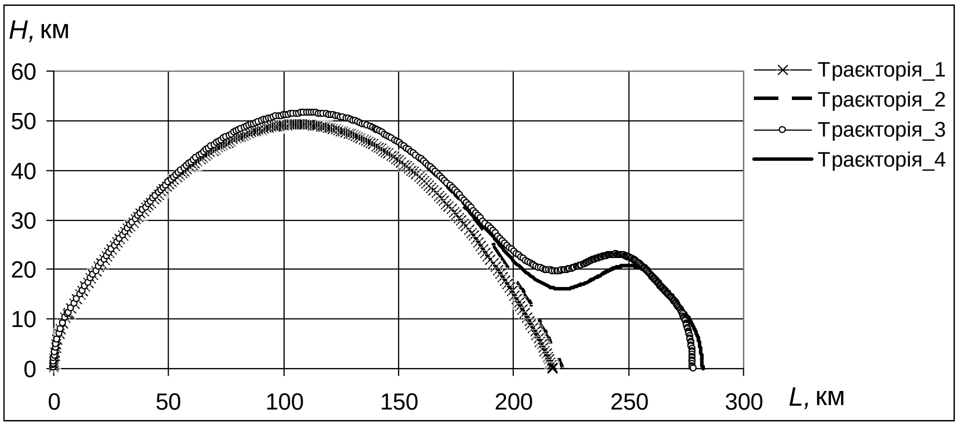

Рис. 2 – Залежність зміни висоти від поточної дальності польоту КРО за балістичними і аеробалістичними траєкторіями з вертикальним стартом, коли число Маха досягає значень М=[5÷6]

Таблиця 7

Програми керування кутом тангажа в часі на активній ділянці траєкторії для різних схем польоту КРО з вертикальним стартом за критерієм дальність L (км), коли число Маха досягає значень M=[3÷4]

Траєкторії	Тип програми керування на активній ділянці траєкторії		
	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{1} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{2} A_i \cdot t^i$	$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{3} A_i \cdot t^i$
Траєкторія 1	**66,532**	59,872	52,452
Траєкторія 2	**54,785**	54,058	50,163
Траєкторія 3	**59,716**	59,342	57,699
Траєкторія 4	**73,320**	70,536	68,932

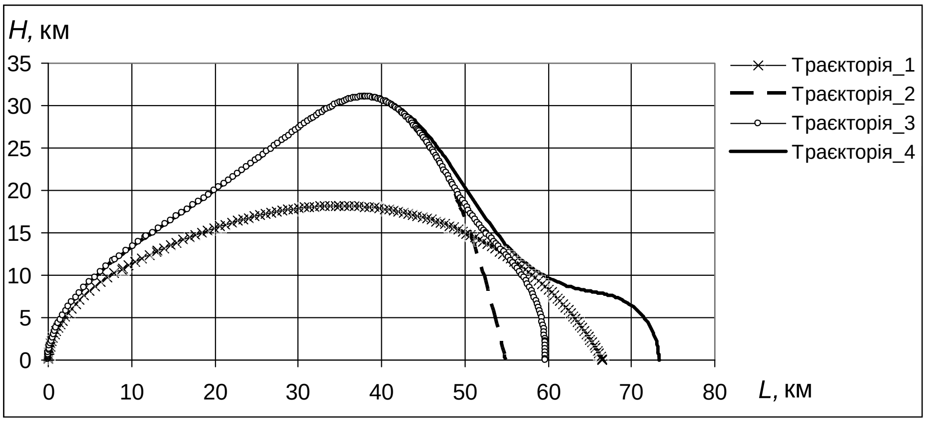

Рис. 3 – Залежність зміни висоти від поточної дальності польоту КРО за балістичними і аеробалістичними траєкторіями з вертикальним стартом, коли число Маха досягає значень M=[3÷4]

Аналіз результатів оптимізації різних траєкторій КРО за критерієм дальність польоту L показав, що оптимальною програмою у класі поліноміальних функцій на активній ділянці траєкторії з вертикальним стартом є лінійна залежність кута тангажа від часу.

Висновки. Використано методичне забезпечення [5] для оптимізації проєктних параметрів і програм керування рухом КРО схеми «качка» за критерієм дальності балістичних і аеробалістичних траєкторій. Визначено оптимальні програми зміни в часі кута тангажа за критерієм дальності досліджуваних траєкторій КРО з вертикальним стартом, коли число Маха досягає різних значень. Аналіз результатів оптимізації параметрів балістичних і аеробалістичної траєкторій за критерієм дальність польоту КРО показав, що оптимальною програмою у класі поліноміальних функцій на активній ділянці траєкторії з вертикальним стартом є лінійна залежність кута тангажа від часу.

Відзначено, що, дальність польоту КРО істотно залежить від значень обраних проєктних параметрів, параметрів траєкторії та програм керування, що оптимізуються. У зв'язку з цим оптимізація обраних (та, можливо, інших) параметрів при вирішенні конкретних цільових задач представляється необхідним початковим етапом проєктування КРО.

Дослідження виконані за рахунок фінансування за бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень (КПКВК 6541230) на 2023 – 2024 роки».

1. *Дегтярёв А. В.* Ракетная техника проблемы и перспективы. Избранные научно-технические публикации. Днепропетровск: АРТ–Пресс, 2014. 420 с.
2. *Игдалов И. М., Кучма Л. Д., Поляков Н. В., Шептун Ю. Д.* Ракета как объект управления. Днепропетровск: АРТ–Пресс, 2004. 544 с.
3. *Tewari Ashish.* Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets. Kanpur: John Wiley & Sons Publ. 2011. 456 pp. https://doi.org/10.1002/9781119971191
4. *Fleeman Eugene L.* Tactical missile design. Second Edition. Lilburn, Georgia: AIAA Education series. 2006. 469 p.
5. *Сюткіна-Дороніна С. В.* Методичне забезпечення оптимізації основних характеристик одноступінч тих ракет з маршовим двигуном на твердому паливі: дис. … кан. тех. наук: утв. 29.06.21. Дніпро. 2021. 168 с.
6. *Аксененко А. В., Баранов Е. Ю., Гурский А. И., Клочков А. С., Морозов А. С., Алпатов А. П., Сенькин В. С., Сюткина-Доронина С. В.* Методическое обеспечение для оптимизации на начальном этапе проектирования проектных параметров, параметров траектории и программ управления движением ракетного объекта. Космическая техника. Ракетное вооружение. 2018. № 2 (116). С. 101–116. https://doi.org/10.33136/stma2018.02.101
7. Catalogue. China: Aerospase Long-march International, February. 2017. 136 p.
8. *Згурець С.* Як в Україні створювались оперативно-тактичні ракетні комплекси: website. June 20, 2020 URL: https://defence-ua.com/weapon_and_tech/jak_v_ukrajini_stvorjuvalis_operativno_taktichni_raketni_kompleksi-1022.html (Last accessed: 11.09.2023).
9. Lockheed Martin's GMLRS+ Completes Successful Test Flight of Long-Range Motor. Lockheed Martin Corporation: website. Aug. 9, 2011 URL: https://news.lockheedmartin.com/2011-08-09-Lockheed-Martins-GMLRS-Completes-Successful-Test-Flight-of-Long-Range-Motor (Last accessed: 15.09.2023).
10. *Senkin V. S., Syutkina-Doronina S. V.* On the Issue of Choice of the Parameter Optimization Method for a Guided Missile. Science and Innovation. 2020. Vol. 16(3). P. 50–64. https://doi.org/10.15407/scine16.03.050
11. *Разумев В. Ф., Ковалев Б. К.* Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе. М.: Машиностроение. 1976. 356 с.
12. *Синюков А. М., Волков Л. И., Львов А. И., Шишкевич А. М.* Баллистическая ракета на твердом топливе. М.: Воениздат. 1972. 511 с.

Отримано 18.08.2023,
в остаточному варіанті 29.09.2023