УДК 629.7

А. Е. ЗАКРЖЕВСКИЙ, В. С. ХОРОШИЛОВ

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПРИВЕДЕНИИ В ПРОЕКТНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ КРУПНОГАБАРИТНОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ

В работе исследуется динамика космического аппарата, который несет упругое тело переменной геометрии, в процессе развертывания по заданной программе компактно сформированной системы в кольцевой элемент типа антенны. Цель исследования – построение механической и математической моделей и численное моделирование динамических процессов. В работе используются методы аналитической механики тел с нестационарными связями. Построены механическая и математическая модели изучаемой системы, проведено всестороннее численное моделирование динамики процесса развертывания, и выявлены основные закономерности динамических процессов. Численное моделирование проводилось под контролем выполнения теоремы об изменении суммарного кинетического момента системы. Подобные задачи в области динамики космических аппаратов ранее не исследовались по разным причинам. Они стали актуальными с появлением небольших космических аппаратов, динамика которых существенно зависит от развертывания несомых трансформируемых конструкций. Полученные результаты демонстрируют метод математического описания динамики системы с программно изменяемой геометрией и поведение реального малого космического аппарата в процессе развертывания упругой конструкции большого размера. Данные численного моделирования позволяют выбрать параметры закона развертывания, приемлемого для практики.

У роботі досліджується динаміка космічного апарата, який несе пружне тіло змінної геометрії, у процесі розгортання по заданій програмі компактно сформованої системи в кільцевий елемент типу антени. Ціль дослідження – побудова механічної і математичної моделей і числове моделювання динамічних процесів. У роботі використовуються методи аналітичної механіки тіл з нестаціонарними зв'язками. Побудовано механічну й математичну моделі досліджуваної системи, проведено всебічне числове моделювання динаміки процесу розгортання, і виявлено основні закономірності динамічних процесів. Числове моделювання проводилося під контролем виконання теореми про зміну сумарного кінетичного моменту системи. Подібні задачі в області динаміки космічних апаратів раніше не досліджувалися за різними причинами. Вони стали актуальними з появою невеликих космічних апаратів, динаміка яких суттєво залежить від розгортання конструкцій, що несуться та трансформуються. Отримані результати демонструють метод математичного опису динаміки системи з програмно змінюваною геометрією й поведінку реального малого космічного апарата в процесі розгортання пружної конструкції великого розміру. Дані числового моделювання дозволяють вибрати параметри закону розгортання, прийнятного для практики.

The paper deals with the dynamics of the spacecraft, which carries an elastic variable-geometry body, during the deployment of a compact system of the circular antenna type in accordance with a given program. A research objective is to simulate mechanically and mathematically the dynamic processes. Methods of analytical mechanics of bodies with non-stationary coupling are used. Mechanical and mathematical models of the system under consideration are built, a comprehensive numerical simulation of the deployment dynamics is made and the basic laws of the spacecraft dynamics are derived. The numerical simulation was made considering the theorem of changes in a total moment of momentum of the system. Similar problems in the field of the spacecraft dynamics were not earlier investigated for various reasons. They became actual with the advent of small spacecraft, whose dynamics depends essentially on the deployment of the carried transformable structures. The obtained results show a method of the mathematical description of the dynamics of the system with a programably-changed geometry and the behaviour of a real small spacecraft during the deployment of the large elastic structure. Data of the numerical simulation allow selection of parameters of the practical deployment law.

Ключевые слова: *космический аппарат, кольцевая антенна, развертывание, динамика*

Введение. Большинство современных космических аппаратов (КА) содержат в своем составе конструкции, которые принимают свою проектную форму и размеры только после вывода КА на расчетную орбиту и его успокоения. Как правило, такие конструкции предназначены для исследования физических полей в окружающем пространстве (антенны различной формы) либо для взаимодействия с этими полями (магнитный демпфер, гравитационный стабилизатор, панели солнечных батарей). Развертывание таких конструкций на орбите, особенно при их существенной упругости, может вызвать существенные возмущения ориентации КА. Исследование динамики КА в процессе развертывания несомых им конструкций требуется для определения возможности сокращения времени развертывания, уменьшения массы развертываемых конструкций, для анализа воздействия процесса развертывания на ориентацию КА. Существует большое количество работ, посвященных исследованию динамики развертывания упругих конструкций как с фиксированного или вращающегося основания, так и с обычных КА. Краткий обзор работ по рассматриваемой теме изложен в работе [1].

Ряд задач в рассматриваемой области ранее не исследовался по разным причинам. Иногда просто не было предпосылок для их постановки. Так, разработчиков КА часто не интересовало воздействие процесса развертывания кольцевых антенн, смотанных предварительно в рулон, на ориентацию КА, поскольку относительная масса всего узла была небольшой. С началом широких исследований в области микро- и малых спутников, для которых выдвигаемые элементы соизмеримы по массе со всей системой, эта проблема оказалась недостаточно исследованной. Она имеет разные аспекты в связи с разнообразием новых конструктивных решений для выдвигаемых космических конструкций.

Данная статья содержит описание метода построения математической модели и результатов численного моделирования динамики нестабилизированного КА, с борта которого по заданной программе развертывается кольцевая антенна диаметром 30 м, образуемая упругой предварительно напряженной лентой, в начальный момент намотанной на барабан.

Наружный конец ленты фиксируется вблизи точки выхода ленты с барабана, которая по мере сматывания ленты приближается к поверхности барабана.

Развертываемые конструкции описанного типа имеют существенную гибкость. В результате предъявления определенных требований к обеспечению их формы на параметры процесса развертывания накладываются определенные ограничения. Достоверное численное моделирование поможет дать ответы на ряд вопросов, связанных с этой проблемой.

Механическая модель системы. Применительно к случаю развертывания кольцевой антенны на круговой орбите механическая модель может быть условно представлена в виде несущего твердого тела и системы развертывания, показанной на рис. 1.

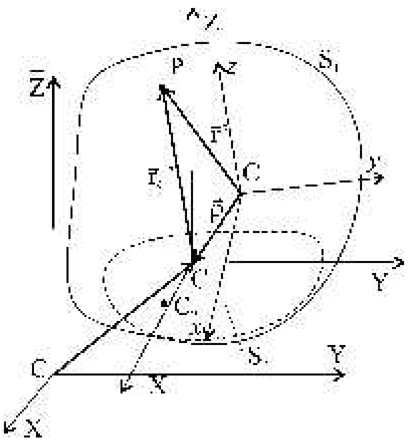

Рис. 1

Здесь $\bar{C}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ – связанный с Землей абсолютный базис с осью $\bar{C}\bar{Z}$, направленной вдоль оси вращения Земли, с осью $\bar{C}\bar{X}$, направленной в точку весеннего равноденствия, с осью $\bar{C}\bar{Y}$, дополняющей базис до ортогональной триады; C_1xyz – базис, связанный с несущим телом, с началом в его центре масс C_1. Под несущим телом S_1 здесь понимаем всю гиростатическую часть системы, под несомым телом S_2 – развертываемую часть с центром масс в точке C_2 без ее гиростатических составляющих (например, без массы барабана для намотки ленты; вращение барабана учтем при вычислении относительного кинетического момента системы). Движение несущего тела S_1 будем определять вектором $\mathbf{v}_{C_1}$ скорости полюса, в качестве которого выберем точку C_1, и вектором его абсолютной угловой скорости $\vec{\mu}$.

Положение носимой материальной точки M_i относительно инерциальной координатной системы $\bar{C}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ определим радиусом-вектором $\vec{r}_i$, а относительно системы C_1xyz, связанной с несущим телом – радиусом-вектором $\vec{r}_i'$. Далее будем предполагать, что

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i'(q_1, \ldots, q_N, t)\ . \qquad (1)$$

В противоположность задачам динамики относительного движения носимых тел, рассматриваемым в [2], здесь рассматривается более общий случай, когда выражение для $\vec{r}_i'$ зависит от t явно, а не только через обобщенные координаты. Следовательно, $\vec{r}_i'$ может изменяться во времени даже тогда, когда величины обобщенных координат, определяющих относительные упругие перемещения, равны нулю.

Так как развертывание предполагается достаточно медленным по сравнению с периодом низшей формы собственных колебаний упругого кольца с жестко закрепленной точкой, круговая антенна может моделироваться используя классический модальный анализ, а собственные формы могут рассматриваться как зависящие от времени пространственные переменные с временной зависимостью. Далее в качестве обобщенных координат, которые определяют относительное изменение кольцевой формы развертываемой ленты, выберем амплитуды отклонения по двум первым формам собственных колебаний в плоскости кольца и двум формам из плоскости кольца [3, 4].

Барабан с разматываемой лентой можно рассматривать как несомый маховик с переменным моментом инерции, а все тело S_2 – как тело с подвижным относительно C_1 центром масс и переменным тензором инерции.

Математическая модель системы. Наиболее компактный и наиболее удобный для численного интегрирования вид уравнения движения системы (как углового, так и относительного) принимают, если выбирать в качестве полюса мгновенное положение центра масс C. В этом случае кинетическая энергия может быть представлена в следующем виде:

$$T = \frac{M}{2}\vec{v}_C^2 + T_r^C - \frac{M}{2}\overset{*}{\vec{r}}{}'^{\,2}_C + \frac{1}{2}\vec{\mu}\cdot\Theta^C\cdot\vec{\mu} + \vec{\mu}\cdot\vec{K}_r^C\ . \qquad (2)$$

Заметим, что хотя кинетическая энергия относительного движения и является скаляром, из вышесказанного следует, что для корректного определения относительных скоростей точек системы нужно указывать полюс, относительно которого эти скорости определяются.

Применение оператора Эйлера $\mathrm{E}_s(\cdot)$ к этому выражению приводит к следующему виду уравнений Лагранжа 2-го рода для обобщенных координат q_s:

$$\mathrm{E}_s(T_r^C) - M\,\overset{**}{\vec{r}}{}'_C\cdot\frac{\partial\vec{r}_C{}'}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\vec{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta^C}{\partial q_s}\cdot\vec{\mu} + \dot{\vec{\mu}}\cdot\frac{\partial\vec{K}_r^C}{\partial\dot{q}_s} + \vec{\mu}\cdot\mathrm{E}_s^*(\vec{K}_r^C) = Q_s\,, \qquad (3)$$

где $E_s^*(\cdot)$ – оператор Эйлера, в котором дифференцирование по времени проводится в связанном базисе, Q_s – обобщенные силы.

Здесь уместно отметить, что величина $E_s^*(\vec{K}_r^C)$ не сводится к $-2\dfrac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial q_s}$, как это показано в [2] для $E_s^*(\vec{K}_r^O)$, поскольку здесь рассматривается более общий случай нестационарных связей (см. выражение (1)).

Здесь использованы следующие обозначения: Θ^C – тензор инерции всей системы относительно точки C, M – масса всей системы, $\vec{K}_r^C = \int_m \vec{r}\,' \times \overset{*}{\vec{r}}\,' dm - M\,\vec{r}_C\,' \times \overset{*}{\vec{r}}_C\,'$ – относительный кинетический момент развертываемой части относительно точки C, $\vec{r}_C^{\,'}$ – радиус-вектор мгновенного положения центра масс в связанном базисе, $*$ обозначает дифференцирование по времени в связанном базисе.

Уравнение Эйлера–Лагранжа в векторной форме достаточно просто получить, если использовать теорему об изменении кинетического момента всей системы. Полный кинетический момент рассматриваемой системы имеет вид

$$\vec{K}^C = \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{K}_r^C. \tag{4}$$

В результате применения указанной теоремы получаем уравнение Эйлера–Лагранжа в виде

$$\Theta^C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \overset{*}{\Theta}{}^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\Theta^C \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times \vec{K}_r^C = \vec{m}^C, \tag{5}$$

который совпадает с известной записью [2].

Если дополнить систему уравнений (3), (5) кинематическими уравнениями, получим замкнутую систему уравнений движения, для которой можно сформулировать задачу Коши с целью исследовать поведение системы при изменении ее геометрии.

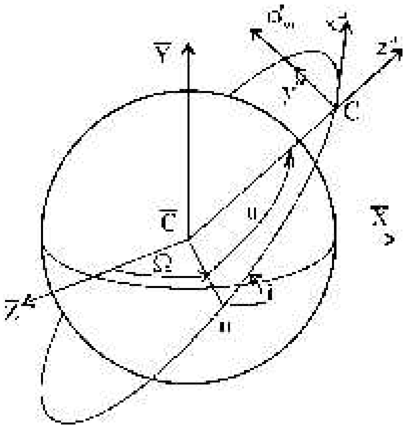

Рис. 2

В дополнение к принятым координатным базисам введем орбитальную систему координат, относительно которой в дальнейшем будем рассматривать движение КА. Эта система координат вводится традиционным способом [5], она связана с центром масс C всей системы и показана на рис. 2. На этом рисунке орбитальная система координат показана так, что ось Cx^{or} направлена по вектору скорости КА, ось Cy^{or} направлена по бинормали к орбите, ось Cz^{or} направлена вдоль местной вертикали. Система координат $\bar{C}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, как и выше – абсолютная, связанная с Землей. На рис. 2 Ω обозначает долготу восходящего узла от точки Весны, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты, $\vec{\omega}^{or}$ – вектор орбитальной угловой скорости.

Пренебрегая прецессией орбиты применительно к рассматриваемому процессу, в дальнейшем будем считать абсолютную угловую скорость орбитального базиса равной $\vec{\omega}^{or}$ и неизменной в абсолютном базисе.

К выбору кинематических параметров, определяющих ориентацию несущего тела в орбитальных осях, здесь следует отнестись с осторожностью. В рассматриваемом случае мы имеем дело с режимом движения, при котором возможны существенные нарушения ориентации КА, вплоть до изменения ее на обратную.

Поэтому остановим свой выбор на параметрах Родрига–Гамильтона. Кинематические уравнения, записанные в этих параметрах, не вырождаются ни при каких их значениях, что особенно важно для численного моделирования. В скалярном виде эти уравнения можно записать следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\tilde{\omega}_1\lambda_1 - \tilde{\omega}_2\lambda_2 - \tilde{\omega}_3\lambda_3, \quad & 2\dot{\lambda}_1 &= \tilde{\omega}_1\lambda_0 + \tilde{\omega}_3\lambda_2 - \tilde{\omega}_2\lambda_3; \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \tilde{\omega}_2\lambda_0 + \tilde{\omega}_1\lambda_3 - \tilde{\omega}_3\lambda_1, \quad & 2\dot{\lambda}_3 &= \tilde{\omega}_3\lambda_0 + \tilde{\omega}_2\lambda_1 - \tilde{\omega}_1\lambda_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненты кватерниона, осуществляющего преобразование орбитального базиса в связанный, $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega'_{oi}$ $(i = 1, 2, 3)$, ω_i – проекции вектора абсолютной угловой скорости несущего тела на оси связанного с ним базиса, ω'_{oi} – проекции вектора орбитальной угловой скорости также на связанный базис.

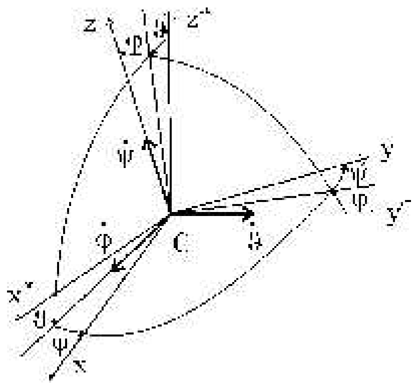

Рис. 3

Поскольку более привычными для иллюстрации положения в пространстве связанного координатного базиса являются все же углы ориентации типа углов Крылова [2], воспользуемся последовательностью поворотов, показанных на рис. 3, для введения углов ориентации φ, ϑ, ψ, где φ – угол крена, ϑ – угол тангажа, ψ – угол курса. Легко показать, что для таких углов Крылова можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{-2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)}{\sqrt{1-[2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)]^2}}; \\ \vartheta &= \operatorname{arctg}\frac{2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}; \\ \psi &= \operatorname{arctg}\frac{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Они удобны для построения графиков в привычных переменных. Вырождение аргументов арктангенсов при значениях углов $\pm(2k+1)\pi/2$ $(k = 0,1,\ldots)$ легко обходится в вычислительной программе. Поскольку компьютер оперирует только с главными значениями арктангенсов, в вычислительной программе должен быть заложен алгоритм восстановления полных значений углов ориентации, что реализуется достаточно просто.

При численном интегрировании системы уравнений (5), (6) проводилась коррекция нормы кватерниона [6].

Геометрия точек развертываемой ленты. Схема устройства для развертывания кольцевой антенны приведена на рис. 4. Здесь C_1xyz – связанный базис КА, точка O' – центр кольца переменного радиуса r_k. Для определенности рассмотрим среднюю линию ленты, намотанной на барабан, как правую спираль Архимеда $\rho = \frac{\delta}{2\pi}\varphi$, $\varphi \in [0,\Phi]$, где δ – толщина ленты. Часть этой спирали с $\varphi \in [0,\varphi_B]$ образует тело самого барабана (на рисунке эта область затемнена, а спираль в ней показана пунктиром). Собственно лента до начала развертывания соответствует значениям $\varphi \in [\varphi_B,\Phi]$. На рисунке 4 точка А – точка схода ленты с барабана и одновременно точка закрепления свободного конца ленты. Точка G – произвольная точка спирали. В начальный момент вся лента находится на барабане и каждая точка ее срединной поверхности лежит на спирали. Точка В – начало ленты на барабане. Ей соответствует угловая координата спирали φ_B. Если r_0 – расстояние от точки В до центра барабана D, то $\varphi_B = \frac{2\pi r_0}{\delta}$.

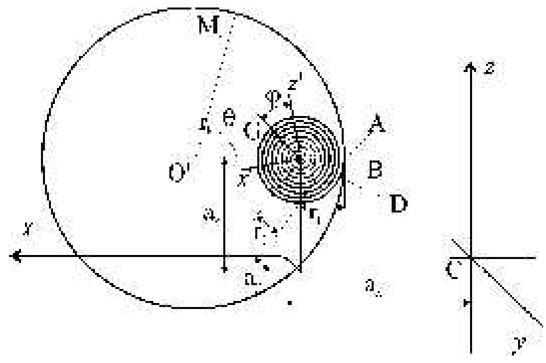

Рис. 4

Длина части спирали, занятой барабаном, равна

$$L_{DB} = \frac{\delta}{4\pi}[\varphi_B\sqrt{1+\varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1+\varphi_B^2})]. \quad (8)$$

В начальный момент точка А находится на конце спирали. Значение φ_A может быть найдено численно по известной полной длине ленты, образующей кольцевую антенну в конце развертывания из условия:

$$L_{AB} = \frac{\delta}{4\pi}[\varphi_A\sqrt{1+\varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1+\varphi_A^2})] - \frac{\delta}{4\pi}[\varphi_B\sqrt{1+\varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1+\varphi_B^2})] = 2\pi R_k, \quad (9)$$

где R_k – радиус развернутой антенны.

Даже до начала развертывания наружный виток спирали уже является исходным состоянием кольцевой антенны. Следовательно, начальная длина ленты, образующей кольцо, может быть вычислена по формуле

$$s_0 = \frac{\delta}{4\pi}[\varphi_A\sqrt{1+\varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1+\varphi_A^2})] - \frac{\delta}{4\pi}[(\varphi_A - 2\pi)\sqrt{1+(\varphi_A-2\pi)^2} + \ln((\varphi_A - 2\pi) + \sqrt{1+(\varphi_A-2\pi)^2})]. \quad (10)$$

Полный угол намотки ленты на барабан $\Phi = \varphi_A - \varphi_B$. Для того, чтобы точка В совместилась с точкой А и стала концом развернутого кольца, барабан нужно повернуть на угол $\Psi = (\varphi_A - 2\pi) - \varphi_B = \Phi - 2\pi$. Длина ленты s, образующей кольцо радиуса r_k, при повороте барабана на произвольный угол ψ составит

$$s = \frac{¢}{4®}[¨_A\sqrt{1+¨_A^{\,2}} + \ln(¨_A + \sqrt{1+¨_A^{\,2}})] -$$
$$-\frac{¢}{4®}[(¨_A - 2® - ·)\sqrt{1+(¨_A - 2® - ·)^2} + \ln((¨_A - 2® - ·) + \sqrt{1+(¨_A - 2® - ·)^2})]. \quad (11)$$

При $· = 0$, т. е. до начала развертывания, это выражение совпадает с (10). Продифференцировав дважды выражение (11) по времени, можно получить выражения для $\dot{s}$ и $\ddot{s}$, которые необходимы для вычисления коэффициентов уравнений движения.

В процессе развертывания точки ленты совершают сложное движение. С одной стороны, они все время находятся на кольце переменного радиуса, центр которого смещается в связанном базисе (его положение в связанном базисе можно однозначно определить тремя координатами $a_{xr}(t), a_y, a_z$, из которых первая является известной функцией времени, а остальные две постоянны), с другой стороны, каждая частица ленты на кольце, выйдя из точки А, меняет свою угловую координату g (которую по аналогии с механикой сплошной среды можно рассматривать как Эйлерову координату) (см. рис. 4), которая описывает положение произвольной точки кольцевой траектории движения ленты, от нуля до некоторой конечной величины. Каждой материальной точке по длине ленты можно поставить в однозначное соответствие ее удаление l от зафиксированного в точке А конца ленты (на рис. 4 зафиксирован правый край нижней ветви ленты). Эту величину можно рассматривать как Лагранжеву координату частиц ленты). Очевидно, что угловая координата любой точки ленты теперь может быть определена как $±(t) = 2® - l / r_k(t)$. Очевидно также, что $l \in [0, s(t)]$, где $s(t)$ – текущая длина кольца. Переменная $±(t)$ имеет такой же геометрический смысл, как и угол g, однако для конкретной материальной точки ленты ее значение переменно во времени, поскольку она зависит от $r_k(t)$.

В процессе развертывания кольцевой антенны несущее тело может совершать сложные угловые движения, приводящие при малой жесткости кольца к возникновению его упругих колебаний как в его плоскости, так и поперечных колебаний. В дальнейшем будем учитывать по две парциальных формы упругих колебаний кольца, защемленного в одной точке (на рис. 4 это точка A), в каждом направлении. Будем считать, что при упругих колебаниях кольца ввиду малости периодов собственных колебаний кольца по сравнению с длительностью процесса его развертывания формы упругих колебаний не зависят от времени явно. Такое предположение позволяет записать следующее выражение для радиуса-вектора произвольной материальной точки M_i ленты в пределах кольца в связанном базисе O_1xyz:

$$r'_x = a_{xr}(t) - \cos(2® - l / r_k(t))\, r_k(t) + q_{u1}(t)\, uv1cs(g) + q_{u2}(t)\, uv2cs(g);$$
$$r'_y = a_y + q_{w1}(t)\, w1(g) + q_{w2}(t)\, w2(g); \quad (12)$$
$$r'_z = a_z + \sin(2® - l / r_k(t))\, r_k(t) + q_{u1}(t)\, uv1sc(g) + q_{u2}(t)\, uv2sc(g).$$

Здесь $uv1cs(g), uv2cs(g), uv1sc(g), uv2sc(g)$ – первая и вторая формы колебаний кольца в его плоскости в проекции на оси O_1x и O_1z, $w1(g), w2(g)$ – формы колебаний кругового кольца из плоскости.

Запишем также радиусы-векторы характерных точек системы: центра масс барабана $\vec{r}_D = \{a_x, a_y, a_z\}$, центра кольца $\vec{r}_{O'}' = \{a_x - r_L + r_k, a_y, a_z\}$. Текущая масса ленты на барабане $m_{dl} = m_l(L_{AB} - s)$, наружный радиус намотки ленты на барабан $r_L = r_0 + \text{©}(\Phi - \sim)$. Здесь $\text{©} = \text{¢}/2\text{®}$, ¢ – толщина ленты, m_l – погонная масса ленты.

Кинематика точек упругой ленты. Остановимся более подробно на определении скоростей материальных точек ленты, принадлежащих кольцу.

Дифференцирование выражений (12) по времени в связанной системе координат даст относительные скорости движения материальных точек ленты как функции времени и координат g и l:

$$\overset{*}{r}'_x = a_{xr}(t) + \sin(2\text{®} - l/r_k(t))\frac{l\,\dot{r}_k(t)}{r_k(t)} - \cos(2\text{®} - l/r_k(t))\,\dot{r}_k(t) + \dot{q}_{u1}(t)\,uv1cs(\text{g})$$

$$+ \dot{q}_{u2}(t)\,uv2cs(\text{g});$$

$$\overset{*}{r}'_y = \dot{q}_{w1}(t)\,w1(\text{g}) + \dot{q}_{w2}(t)\,w2(\text{g}); \qquad (13)$$

$$\overset{*}{r}'_z = \cos(2\text{®} - l/r_k(t))\frac{l\,\dot{r}_k(t)}{r_k(t)} + \dot{r}_k(t)\sin(2\text{®} - l/r_k(t)) + \dot{q}_{u1}(t)\,uv1sc(\text{g})$$

$$+ \dot{q}_{u2}(t)\,uv2sc(\text{g}).$$

Учитывая, что начало связанного базиса выбрано в центре масс гиростатической части КА (т. е. в данном случае это КА без ленты), выражение для радиуса-вектора центра масс всей системы может быть записано в виде

$$\vec{r}_C{}' = \Big(\int\limits_{m_{KL}} \vec{r}_i{}'dm_{KL} + m_{DL}\vec{r}_D{}'\Big)/M = \Big(\text{«}\int\limits_0^{s(t)} \vec{r}{}'_{i\_rig}dl + \text{«}r_k\int\limits_0^{2\text{®}} \vec{r}{}'_{i\_fl}d\text{g} + m_{DL}\vec{r}_D{}'\Big)/M. \qquad (14)$$

Здесь $\vec{r}{}'_{i\_rig}$ и $\vec{r}{}'_{i\_fl}$ – очевидные из (12) обозначения составляющих радиуса-вектора произвольной точки ленты, зависящие только от развертывания кольца и только от упругих колебаний, $m_{DL}(t)$ – текущее значение массы ленты на барабане.

Аналогично, выражение для относительной скорости радиуса-вектора центра масс всей системы с учетом правила дифференцирования интеграла по переменной во времени области может быть записано в виде

$$\overset{*}{\vec{r}}_C{}' = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{m_{KL}} \vec{r}_i{}'dm_{KL} + m_{DL}\,\vec{r}_D{}'\Big)/M =$$

$$\Big(\text{«}\int\limits_0^{s(t)} \overset{*}{\vec{r}}{}'_{i\_rig}dl + \dot{s}(t)\text{«}\,\vec{r}{}'_{i\_rig}\Big|_{l=s(t)} + \text{«}\dot{r}_k(t)\int\limits_0^{2\text{®}} \overset{*}{\vec{r}}{}'_{i\_fl}d\text{g} + \text{«}r_k(t)\int\limits_0^{2\text{®}} \overset{*}{\vec{r}}{}'_{i\_fl}d\text{g} + \dot{m}_{DL}\vec{r}_D{}'\Big)/M. \qquad (15)$$

Полученные выше выражения для $\vec{r}_i{}'$ и $\overset{*}{\vec{r}}_i{}'$ пригодны для определения $\vec{r}_C{}'$ и $\overset{*}{\vec{r}}_C{}'$, но они неудобны для вычисления таких величин, как $\vec{K}_r^{C_1}, \Theta^{C_1}$ и их производных по времени в связанном базисе. Удобнее рассматривать мгновенное положение материальной точки ленты на кольцевой траектории переменного радиуса, вдоль которой точки ленты смещаются. В каждый момент времени через произвольную точку кольца M_i с угловой координатой g_i

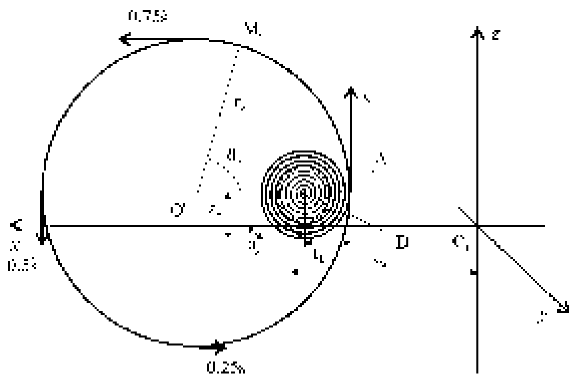

Рис. 5

движется точка ленты. Если знать относительную скорость точки M_i кольца и скорость смещения ленты относительно этой точки, можно определить необходимые для составления уравнений движения выражения значительно проще.

Движение ленты по кольцу происходит с переменной по угловой координате скоростью и, как легко понять из рис. 5, линейно зависит от координаты γ. Если в точке схода ленты с барабана она имеет скорость $\dot{s}(t)$ относительно точки кольца с угловой координатой $\gamma = 0$, то в точке кольца с угловой координатой $\gamma = \pi$ эта скорость уже в два раза меньше, а в точке $\gamma = 2\pi$ равна нулю.

В результате, скорость произвольной материальной точки ленты, проходящей в данный момент через произвольную точку M_i кольцевой траектории, относительно этой точки в проекциях на связанный с КА базис можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}'_x &= (2\pi - \gamma)\sin(\gamma)\,\dot{r}_k; \\ \tilde{v}'_y &= 0; \\ \tilde{v}'_z &= (2\pi - \gamma)\cos(\gamma)\,\dot{r}_k. \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь выражения (12) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} r'_x &= a_{xr}(t) - \cos(\gamma)\,r_k(t) + q_{u1}(t)\,uv1cs(\gamma) + q_{u2}(t)\,uv2cs(\gamma); \\ r'_y &= a_y + q_{w1}(t)\,w1(\gamma) + q_{w2}(t)\,w2(\gamma); \\ r'_z &= a_z + \sin(\gamma)\,r_k(t) + q_{u1}(t)\,uv1sc(\gamma) + q_{u2}(t)\,uv2sc(\gamma). \end{aligned} \tag{17}$$

Очевидно, что при $l=(2\pi - \gamma)r_k(t)$ выражения (12) совпадают с (17). Тем не менее, дифференцирование (17) по времени в связанном базисе не даст выражение для полной относительной скорости произвольной точки ленты. Оно даст лишь скорости относительного движения точек кольца, имеющих угловую координату γ. Чтобы получить такое выражение, нужно рассматривать движение точек кольца как дополнительное переносное движение. Тогда можно записать:

$$\vec{v}_i{}' = \vec{\tilde{v}}_i{}' + \overset{*}{\vec{r}_i}{}', \tag{18}$$

где последнее слагаемое получено в результате дифференцирования по времени выражения (17) в связанном базисе. Нетрудно убедиться, что выражения для проекций этого вектора на связанный базис совпадают с выражениями (13) при $l=(2\pi - \gamma)r_k(t)$.

Выражение для радиуса-вектора центра масс C теперь выглядят следующим образом:

$$\vec{r}_C{}' = \Big(\int_{m_{KL}} \vec{r}_i{}' dm_{KL} + m_{DL}\vec{r}_D{}'\Big)/M = \Big(«r_k(t)\int_0^{2\pi} \vec{r}\,'_i\, d\gamma + m_{DL}\vec{r}_D{}'\Big)/M\ . \tag{19}$$

Аналогично, выражение для вектора относительной скорости центра масс может быть получено в результате дифференцирования (19) и выглядит так:

$$\vec{v}_C' = \left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{m_{KL}} \vec{r}_i' dm_{KL} + m_{DL}\,\vec{r}_D'\right)/M =$$

$$\left(\dot{\rho}\, r_k(t)\int\limits_0^{2\pi} \vec{r}_i^{\,*}\, d\gamma + \rho\, \dot{r}_k(t)\int\limits_0^{2\pi} \vec{r}_i'\, d\gamma + m_{DL}\,\vec{r}_D'\right)/M. \qquad (20)$$

На основе полученных геометрических и кинематических зависимостей после их дифференцирования по соответствующим переменным и упрощения с помощью символьных преобразований с использованием пакета Mathematica 5© можно достаточно просто записать выражения для основных динамических величин, определяющих коэффициенты уравнений движения (3), (5).

Численное моделирование. При численном моделировании зададимся следующими базовыми значениями основных параметров системы: масса несущего тела $m_1 = 265$ кг, масса одного метра ленты $m_l = 0{,}148$ кг, толщина ленты $\delta = 0{,}002$ м, радиус развернутой антенны r_k =15 м, начальные отклонения по углам ориентации – нулевые, значения компонент вектора угловой скорости КА в орбитальной системе координат в момент начала развертывания находятся в диапазоне 0,0 – 0,05 c^{-1}. Длительность развертывания

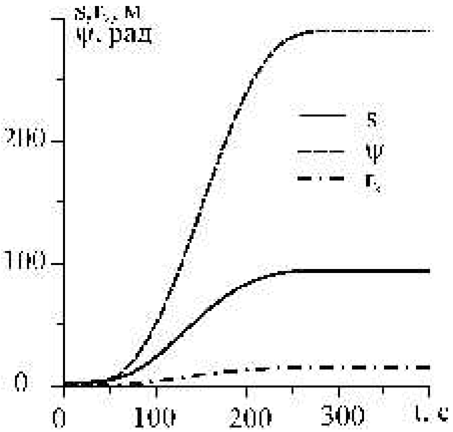

Рис. 6

$T_f - T_0$ = 500–1000 с, закон развертывания во времени соответствует плавному выходу на постоянную скорость в течение 50 с и такой же остановке процесса. На рис. 6 показаны законы изменения во времени угла поворота барабана ψ, длины развернутой ленты s и радиуса кругового кольца r_k.

Момент инерции барабана для ленты J_{dr} = 0,01кг·м^2, диагональные компоненты тензора инерции несущего тела J_{xx} = 4 кг·м^2, J_{yy} = 4 кг·м^2, J_{zz}= 6 кг·м^2, r_0=0,2 м, a_x = 1,0 м, $a_y = a_z =$ 0,2 м. Моментами внешних сил, действующих на систему в течение времени моделирования ее поведения, будем пренебрегать, высоту круговой орбиты выберем 600 км, наклонение $i = 1{,}0$ рад, долготу восходящего узла $\Omega = 0{,}0$. Хотя здесь и не рассматривается движение КА по орбите, параметры орбиты требуются для вычисления проекций полного кинетического момента КА в проекциях на оси абсолютного базиса, что нужно для контроля погрешностей решения задачи Коши.

Очевидным фактом является то, что динамика развертываемой крупногабаритной упругой конструкции существенным образом зависит от закона развертывания, в данном случае от закона изменения угла поворота барабана во времени. Традиционные законы развертывания, используемые обычно в космических технологиях, состоят в выведении исполнительного электродвигателя на постоянную угловую скорость вращения, поддержании постоянной скорости вращения в течение заданного интервала времени и, наконец, остановки двигателя с уменьшением скорости практически по линейному закону. В этом случае функция времени, которая описывает изменение угловой скорости вращения двигателя, имеет две угловые точки, а функция времени, описывающая момент, создаваемый приводом, будет иметь четыре точки разрыва.

В данном исследовании в качестве закона вращения барабана · (t) примем достаточно гладкий закон, который получен на основе решения задачи оптимального управления, в которой минимизируются относительные ускорения по внутренним степеням свободы (см. [7], частный случай II). Такой закон будет создавать минимально возможные на выбранном интервале времени развертывания возмущения, способствующие возникновению упругих колебаний.

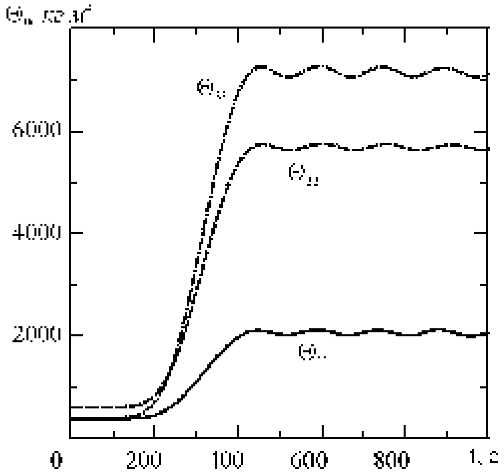

Рис. 7

Здесь для выбранного закона · (t) показаны также законы изменения $s(t)$ и $r_k(t)$. Отличие от нуля $s(0)$ связано с тем, что в начальный момент времени наружный слой ленты на барабане рассматривается как исходное состояние кольца. Поведение во времени диагональных компонент тензора инерции КА показано на рис. 7. Здесь видно, что в результате развертывания антенны эти величины существенно возрастают. Больше всего возрастает компонента $\Theta_{2,2}^{C}$.

Численное решение задачи Коши проводится методом Рунге–Кутта четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования, равным 0,001 с.

На рис. 8 показано поведение во времени углов ориентации.

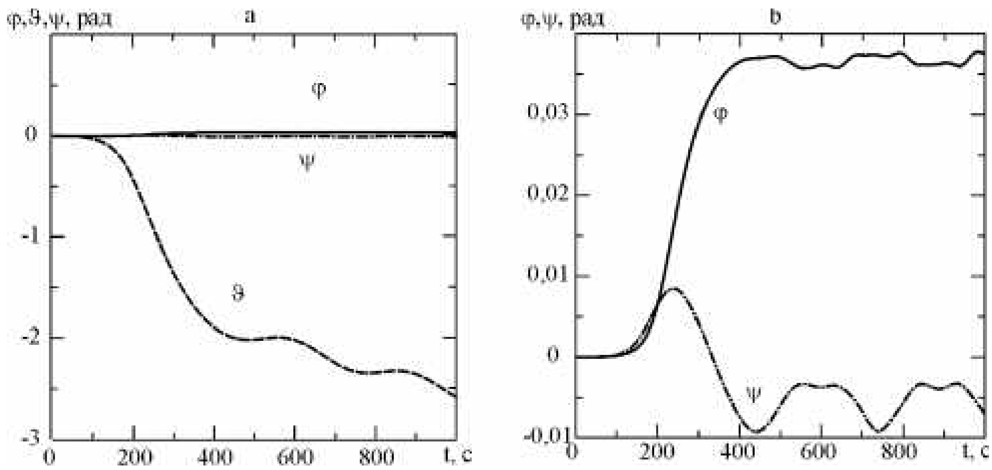

Рис. 8

Здесь видно, что в процессе развертывания антенны КА совершает почти пол-оборота вокруг оси Cy. Вращения вокруг других осей сравнительно невелики и обусловлены гироскопической связанностью соответствующих каналов. Поскольку было введено предположение, что в начальный момент времени развертывания связанный базис совпадает с орбитальным, на рис. 9a видно, что компонента $\mu_2(0)$ равна орбитальной скорости КА для выбранной орбиты. На рис. 9b показано поведение двух других компонент, для которых амплитуды отклонений существенно меньше, чем для μ_2.

После завершения развертывания антенны, когда компоненты тензора инерции существенно возрастают, все компоненты вектора угловой скорости заметно уменьшаются и ориентация КА в орбитальной системе координат нарушается.

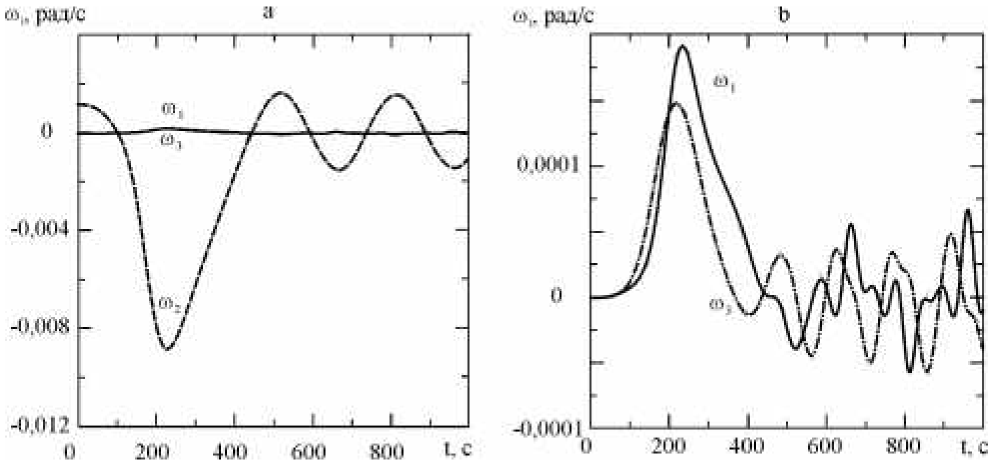

Рис. 9

Поведение обобщенных координат упругих перемещений в процессе развертывания антенны показано на рис. 10a,b в предположении отсутствия конструкционного демпфирования.

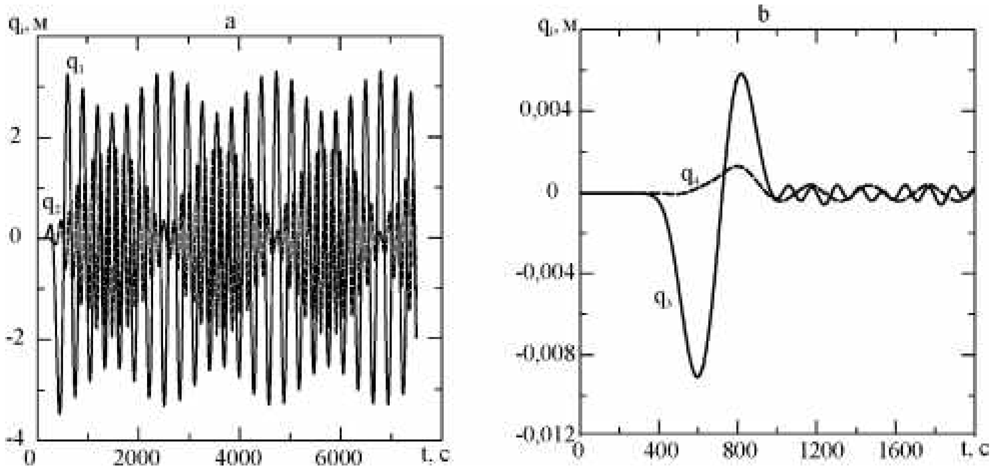

Рис. 10

Наибольшие амплитуды колебаний имеет первая форма колебаний в плоскости кольца (рис. 10a). На рисунке видно, что на длительном интервале времени энергия колебаний периодически перераспределяется между первой и второй формой. При наличии существенного конструкционного демпфирования такие нелинейные колебания быстро затухают. Это же касается и колебаний кольца из плоскости (рис. 10b), которые не проявляют заметной связанности.

Численное моделирование проводилось под контролем выполнения теоремы об изменении суммарного кинетического момента системы. Параллельно с решением задачи Коши для уравнений движения системы вычислялось изменение начального кинетического момента путем интегрирования проекций гравитационного момента по времени. На всем интервале интегрирования уравнений движения значение проекций полученного таким образом кинетического момента и текущего кинетического момента системы, вычисляемого по значениям переменных, определяющих состояние системы в целом, совпадало с точностью до восьми значащих цифр. Это свидетельствует об отсутствии ошибок в вычислительной программе.

Полученные результаты демонстрируют метод математического описания динамики системы с программно изменяемой геометрией и поведение реального малого космического аппарата в процессе развертывания кольцевой антенны большого радиуса.

1. *Закржевский А. Е.* Динамика раскрытия упругого пантографного гравитационного стабилизатора / *А. Е. Закржевский, В. С. Хорошилов* // Техническая механика. – 2011. – №3. – С. 103 – 116.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / *А. И. Лурье*. – М. : Физматгиз. – 1961. – 824 с.
3. *Закржевский А. Е.* Собственные формы и частоты плоских колебаний закрепленного упругого кольца / *А. Е. Закржевский, В. Ф. Ткаченко, В. С. Хорошилов* // Прикладная механика. – 2010. – 46, № 12. – С. 100 –109.
4. *Закржевский А. Е.* Собственные частоты и формы колебаний закрепленного кольца из его плоскости / *А. Е. Закржевский, В. С. Хорошилов* // Прикладная механика. – 2011. – 47, № 6. – С.159 – 168.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс / *В. В. Белецкий*. – М. : Наука. – 1965. – 416 с.
6. *Бранец В. Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / *В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский.* – М. : Наука. – 1973. – 320 с.
7. *Zakrzhevskii A. E.* Slewing of Flexible Spacecraft with Minimal Relative Flexible Acceleration / *A. E. Zakrzhevskii* // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2008. – 31, No. 3. – P. 563 – 570.

Институт механики им. С.П.Тимошенко
Национальной академии наук Украины,
Киев

Получено 24.03.14,
в окончательном варианте 11.09.14

Государственное предприятие
“Конструкторское бюро “Южное” им. М. К. Янгеля”,
Днепропетровск