УДК 629.78

О. Л. ВОЛОШЕНЮК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОНЦЕВОГО ТЕЛА В ДВИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ, СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ВРАЩЕНИЕМ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: oksana.dnepr@gmail.com

Одной из актуальных задач динамики космических тросовых систем (КТС), стабилизированных вращением, является задача исследования влияния динамики концевого тела на движение системы. Цель работы заключается в построении математической модели динамики КТС, которая позволит рассмотреть общие закономерности движения системы и провести более глубокий анализ особенностей динамики концевого тела. Предлагается простейшая для исследуемого движения модель динамики КТС, состоящей из материальной точки и концевого тела, соединенных нитью. Данная модель динамики КТС позволит провести анализ угловых колебаний концевого тела относительно точки крепления к нити с учетом влияния инерциальных характеристик концевого тела, жесткости нити и угловой скорости собственного вращения системы. К практическим вопросам, связанным с данной задачей динамики КТС, можно отнести вопросы устойчивости ориентации концевого тела, вопросы о резонансных режимах в движении системы, а также вопросы о создании необходимых предпосылок для проектирования конкретных КТС.

Однією з актуальних задач динаміки космічних тросових систем (КТС), стабілізованих обертанням, є задача дослідження впливу динаміки кінцевого тіла на рух системи. Мета роботи полягає в побудові математичної моделі динаміки КТС, яка дозволить розглянути загальні закономірності руху системи і провести більш глибокий аналіз особливостей динаміки кінцевого тіла. Пропонується найпростіша для досліджуваного руху модель динаміки КТС, що складається з матеріальної точки і кінцевого тіла, з'єднаних ниткою. Дана модель динаміки КТС дозволить провести аналіз кутових коливань кінцевого тіла відносно точки кріплення до нитки з урахуванням впливу інерційних характеристик кінцевого тіла, жорсткості нитки і кутової швидкості власного обертання системи. До практичних питань, пов'язаних з цією задачею динаміки КТС, можна віднести питання стійкості орієнтації кінцевого тіла, питання про резонансні режими в русі системи, а також питання про створення необхідних передумов для проектування конкретних КТС.

Examining the effects of the end body dynamics on the system motion holds a significance in understanding the dynamics of the space tether systems (STS) stabilized by rotation. The study purpose is to build a mathematical model of the STS dynamics for considering the general regularities of the system motion and to analyze comprehensively the special features of the end body dynamics. The simplest model of the STS dynamics consisting of the material point and the end body connected by a tether is proposed for the motion under consideration. This model can analyze the angular oscillation of the end body relative to the tether attachment point, taking into account the effects of the inertial characteristics of the end body, the tether stiffness and the angular velocity of the proper rotation of the system. Practical problems related with the problem of the STS dynamics may include the problems of the stability of the end body orientation, resonance modes in the system motion, as well as the problems in creating the prerequisites for the design of the specific STS.

Ключевые слова: *космические тросовые системы, математическая модель, стабилизация вращением, концевые тела, переходные режимы.*

Введение. Использование космических тросовых систем (КТС), стабилизированных вращением, является достаточно новым и многообещающим направлением в области современной космонавтики. Такие системы предназначены для решения широкого круга научных и исследовательских задач, в частности, для выполнения задач, которые невозможно или неэкономично решать с помощью существующих средств космической техники [1 – 4].

Исследование динамики вращающихся КТС с учетом собственной динамики концевых тел является сложной задачей динамики космического полета. К настоящему времени эта задача недостаточно изучена, и имеющиеся знания не позволяют достаточно обосновано судить о реализуемости существующих проектов. Успешное решение задачи, связанное с созданием методов исследования и соответствующих математических моделей динамики, а также анализ и определение основных закономерностей движения создадут необходимые предпосылки для проектирования и разработки конкретных проектов КТС. Так, в ряде задач [4 – 6], создание КТС предполагает выполнение программных требований к точности ориентации движения концевых тел системы. Ранее в [7] была предложена математическая модель динамики КТС двух концевых тел, стабилизированная вращением. На основе анализа динамики рассматриваемой КТС, имеющей идентичные концевые тела, показана возможность возникновения нелинейных резонансов, которые оказывают существенное влияние на динамику концевых тел системы в переходных режимах движения. Показано, что в системе происходит долгопериодическая перекачка энергии от одного тела к другому [8]. Поэтому одной из актуальных задач динамики вращающихся КТС является задача исследования влияния динамики концевых тел на движение системы, в частности исследование взаимовлияния колебаний концевых тел КТС и ее собственного вращения.

Для оценки влияния динамики концевого тела на движение вращающейся КТС в статье предлагается простейшая для исследуемого движения модель динамики системы. Простота данной модели позволит провести более глубокий анализ движения концевого тела относительно точки крепления к нити, учесть влияние инерциальных характеристик концевого тела, жесткости нити, и провести оценку возможности возникновения резонансов в движении системы.

Постановка задачи. Предполагается, что один конец нити (материальная точка А) движется по невозмущенной кеплеровой орбите, а вторым концом нить прикреплена к абсолютно твердому телу с центром масс в точке O_1 (рис. 1).

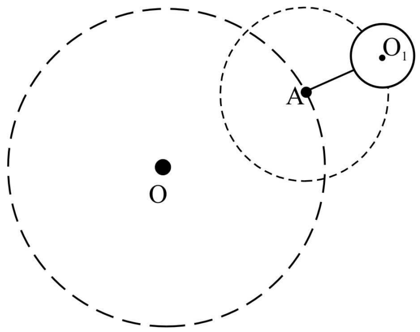

Рис. 1

Системе нить – тело придается вращательное движение вокруг точки А с угловой скоростью, значительно превосходящей угловую скорость орбитального движения. Соединительная нить достаточно легкая и в исследуемом режиме движения достаточно сильно натянута, т. е. нить может рассматриваться как упругая невесомая связь. Рассеивание энергии движения системы происходит только за счет внутреннего трения в упругой нити. Предполагается, что система движется в ньютоновском поле сил, другие внешние воздействия отсутствуют. Предполагается также, что движение системы происходит только в плоскости орбиты.

Уравнения движения. На основании общих теорем механики уравнения движения рассматриваемой КТС можно представить в виде

$$\ddot{\vec{R}}_A = -\frac{\mu \vec{R}_A}{R_A^3},$$
$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{\mu \vec{R}_1 m_1}{R_1^3} - \vec{F}_{tr}, \qquad (1)$$
$$\dot{\vec{L}}_1 = \vec{M}_{grav,1} - \vec{\rho}_{1n} \times \vec{F}_{tr},$$

где $\vec{R}_A$, $\vec{R}_1$ – радиус-векторы, направленные из ньютоновского притягивающего центра в точку А и в центр масс концевого тела соответственно; m_1 – масса концевого тела 1; $\vec{F}_{tr}$ – сила натяжения нити; $\vec{L}_1$ – кинетический момент движения тела относительно собственного центра масс; $\vec{\rho}_{1n}$ – радиус-вектор, направленный из центра масс тела в точку крепления тела к нити; $\vec{M}_{grav,1}$ – момент ньютоновского поля сил, действующий на тело системы; μ – гравитационная постоянная.

Предполагается, что действие силы натяжения нити $\vec{F}_{tr}$ и момента гравитационных сил $\vec{M}_{grav,1}$, действующего на тело 1, определяется формулами, аналогичными формулам [7].

Упругие свойства нити описываются законом Гука, а рассеивание энергии в материале нити – при помощи формул эквивалентного вязкого трения:

$$\vec{F}_{tr} = \left[-c \frac{\vec{r}_l}{r_l} \frac{(r_l - d)}{d} - \chi \dot{r}_l \frac{\vec{r}_l}{r_l} \right] \delta, \quad \delta = \begin{cases} 1, r_l > d, \\ 0, r_l \le d, \end{cases}$$

где $\vec{r}_l$ – вектор, направленный из точки А в точку крепления концевого тела к нити; $r_l = |\vec{r}_l|$; d – номинальная длина нити; c – коэффициент жёсткости; χ – коэффициент вязкого трения [9].

Момент гравитационных сил, действующий на концевое тело системы, описывается формулой

$$\vec{M}_{grav,1} = 3 \frac{\mu}{R_1^3} \vec{e}_{R_1} \times J_1 \vec{e}_{R_1},$$

где J_1 – тензор инерции концевого тела; $\vec{e}_{R_1}$ – единичный вектор $\vec{R}_1$.

На основании (1) уравнение движения центра масс тела 1 относительно точки А записывается как

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_1 - \ddot{\vec{R}}_A = \left[-\frac{\mu \vec{R}_1}{R_1^3} + \frac{\mu \vec{R}_A}{R_A^3} \right] - \vec{F}_{tr} / m_1 . \qquad (2)$$

В предположении того, что концевое тело имеет сферическую форму, уравнение движения концевого тела относительно своего центра масс примет вид

$$J_1\dot{\vec{\omega}}_1 = -\vec{\rho}_{1n} \times \vec{F}_{tr} \ , \tag{3}$$

где $\vec{\omega}_1$ – вектор абсолютной угловой скорости движения концевого тела 1.

В (2) разложим $\ddot{\vec{r}}$ в ряд по степеням $\left(\frac{r}{R}\right)$, пренебрегая членами более высокого порядка. Для удобства и упрощения записей введем обозначение $R = R_A$. Поскольку r порядка сотен метров, а $R \approx 7021$ км, то величина $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ имеет порядок 10^{-8} и ею можно пренебречь.

Учитывая, что $\frac{1}{R_1^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 - 3(\vec{e}_R, \vec{e}_r)\frac{r}{R}\right)$, уравнение для $\ddot{\vec{r}}$ можно представить в виде

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{R^3}\left[3r\vec{e}_R(\vec{e}_R, \vec{e}_r) - r\vec{e}_r\right] - \vec{F}_{tr} / m_1 \ , \tag{4}$$

где $\vec{e}_R$ – единичный вектор $\vec{R}$; $\vec{e}_r$ – единичный вектор вектора r .

Кинематика системы. Для исследования движения рассматриваемой системы введем правые системы координат, аналогичные [4]:

$OX_uY_uZ_u$ – инерциальная система координат (ИСК) с началом в центре Земли O. Ось OX_u направлена в точку весеннего равноденствия, ось OZ_u направлена по оси вращения Земли;

$O_cX_oY_oZ_o$ – орбитальная система координат (ОСК) с началом в центре масс системы – O_c, совпадающей с точкой А. Ось O_cX_o направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центр масс системы с центром Земли, ось O_cY_o – в плоскости мгновенной орбиты в сторону движения центра масс системы;

$O_cX_cY_cZ_c$ – связанная с плоскостью вращения тела КТС система координат (ССК) с началом в O_c. Ось O_cX_c направлена из O_c в центр масс концевого тела 1, ось O_cZ_c – по оси мгновенного вращения вектора, направленного из O_c в центр масс концевого тела 1.

$O_1x_1y_1z_1$ – связанная с концевым телом 1 система координат ССК(Т) с началом в центре масс O_1 тела 1. Оси ССК(Т) совпадают с главными центральными осями инерции тела.

В соответствии с поставленной задачей сделано предположение, что центр масс системы движется по кеплеровой орбите и движение системы происходит только в плоскости орбиты, в этом случае взаимную ориентацию систем координат удобно описать следующим образом (рис. 2): $O_cX_oY_oZ_o$ и $OX_uY_uZ_u$ – углом ν, ($\nu = \omega_{ou}t$, ω_{ou} – угловая скорость движения центра масс КТС по орбите, или $\nu = \frac{\sqrt{\mu R}}{R^2}t$); $O_cX_cY_cZ_c$ и $O_cX_oY_oZ_o$ – углами Эйлера (углом чистого вращения φ'); $O_1x_1y_1z_1$ и $O_cX_cY_cZ_c$ – углами Крылова (углом рысканья ψ_1).

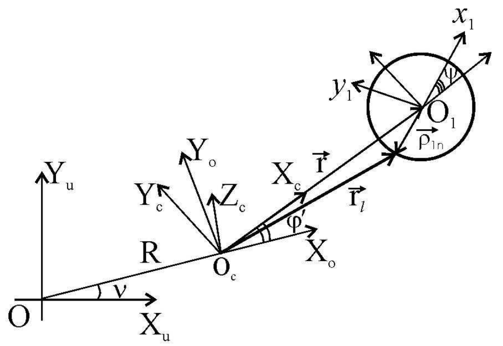

Рис. 2

Уравнения движения в скалярной форме. Для проведение численных исследований динамики концевого тела в ротационном движении системы проведем вывод формул для $\ddot{\vec{r}}$ и $\dot{\vec{\omega}}_1$ в проекциях на оси ССК.

Вектор $\vec{r}$ можно представить как $\vec{r} = r\vec{e}_r$.

Дифференцируя $\vec{r}$ по времени, получим формулы для определения $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_{Y_c},$$

где $\vec{e}_{Y_c}$ – орт оси Y_c.

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_{Y_c}, \qquad (5)$$

где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость ССК относительно ИСК ($\omega_{cu} = \dot{\varphi}$, $\varphi = \nu + \varphi'$).

Запишем выражения для $\vec{F}_{tr}$ в проекциях на оси ССК

$$F_{tr}\,\vec{e}_{r_l}^{(c)} = \delta\left[c\frac{(r_l - d)}{d} + \chi\dot{r}_l\right]\frac{\vec{r}_l^{(c)}}{|\vec{r}_l|}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & r_l < d, \\ 1, & r_l > d, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\dot{r}_l = \frac{\left(\vec{r}_l, \dot{\vec{r}}_l\right)}{|\vec{r}_l|}$.

Из геометрии системы (рис. 2)

$$\vec{r}_l = \vec{r} + \vec{\rho}_{1n}.$$

Дифференцируя $\vec{r}_l$ по времени, получим

$$\dot{\vec{r}}_l = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_{1n},$$

где $\dot{\vec{\rho}}_{1n} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{1n}$.

В соответствии с [10] ориентацию концевого тела 1 в ССК удобно задать радиус-вектором $\vec{\rho}_{1n}$ и углом α. Тогда ориентация радиус-вектора $\vec{\rho}^*_{in} = -\vec{\rho}_{in}$, направленного из точки крепления тела к тросу в центр масс концевого тела, в ССК определяется двумя углами α_1, β_1: углом между $\vec{\rho}^*_{in}$ и осью O_cX_c и углом между проекцией радиус-вектора $\vec{\rho}^*_{in}$ – $\overrightarrow{P\rho}^*_{in}$ на плоскость $O_cX_cY_c$ и осью O_cX_c соответственно (рис. 3).

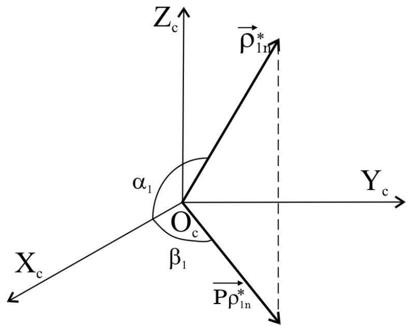

Рис. 3

Тогда в ССК ориентация $\vec{\rho}_{1n}$ определяется столбцом направляющих косинусов единичного вектора $\bar{e}^{(c)}_{\rho_{1n}}$

$$\bar{\rho}^{(c)}_{1n} = \rho_{1n}\bar{e}^{(c)}_{\rho_{1n}},$$

где $\bar{e}^{(c)}_{\rho_{1n}} = -\bar{e}_r \cos\alpha - \bar{e}_{Y_c} \sin\alpha$.

В проекциях на оси ССК выражение для $\dot{\vec{\rho}}_{1n}$ примет вид

$$\dot{\bar{\rho}}^{(c)}_{1n} = \omega_1\rho_{1n}\bar{e}^{(c)}_{y_1},$$

где $\bar{e}^{(c)}_{y_1}$ – орт оси O_1y_1 в проекциях на оси ССК, $\bar{e}^{(c)}_{y_1} = -\bar{e}_r \sin\alpha + \bar{e}_{Y_c} \cos\alpha$.

Аналогично, $\vec{r}_l, \dot{\vec{r}}_l$ в проекциях на оси ССК

$$\bar{r}_l = (\bar{r} - \bar{\rho}_{1n}\cos\alpha)\bar{e}_r - \bar{\rho}_{1n}\sin\alpha\bar{e}_{Y_c},$$

$$\dot{\bar{r}}_l = (\bar{r} - \omega_1\rho_{1n}\sin\alpha)\bar{e}_r + (r\dot{\varphi} + \omega_1\rho_{1n}\cos\alpha)\bar{e}_{Y_c}.$$

Выражения для r_l и $\dot{r}_l$, входящих в F_{tr}, легко получить подстановкой в них $\bar{r}_l$ и $\dot{\bar{r}}_l$

$$r_l = \sqrt{r^2 - 2r\rho_{1n}\cos\alpha + \rho^2_{1n}},$$

$$\dot{r}_l = \frac{\dot{r}\left(r - \rho_{1n}\cos\alpha\right) - r\rho_{1n}\sin\alpha\left(\omega_1 - \dot{\varphi}\right)}{\sqrt{r^2 - 2r\rho_{1n}\cos\alpha + \rho_{1n}^2}}.$$

Момент сил натяжения нити, $\vec{M}_{tr} = -\vec{\rho}_{1n} \times \vec{F}_{tr}$, в проекциях на оси ССК

$$\overline{M}_{tr}^{(c)} = \frac{\rho_{1n} r \sin\alpha}{r_l} F_{tr}\,\overline{e}_{Z_c},$$

где $\overline{e}_{Z_c}$ – орт оси $O_c Z_c$.

Запишем правую часть уравнения (4) в проекциях на оси ССК.

Представим $\vec{e}_R$ в проекциях на оси ССК. Переход из ОСК в ССК показан на рис. 2.

$$\overline{e}_R^{(c)} = \overline{e}_r \cos\varphi' - \overline{e}_{Yc}\sin\varphi'.$$

После некоторых преобразований выражение для $\ddot{\vec{r}}$ в (6) примет вид

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{R^3} r\left[\left(3\cos^2\varphi' - 1\right)\overline{e}_r - \frac{3}{2}\sin 2\varphi' \overline{e}_{Y_c}\right] - \frac{F_{tr}}{m_1 r_l}\left[\left(r - \rho_{1n}\cos\alpha\right)\overline{e}_r - \rho_{1n}\sin\alpha\,\overline{e}_{Y_c}\right]. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и проецируя полученное выражение на оси ССК, получим

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu}{R^3} r\left(3\cos^2\varphi' - 1\right) - \frac{F_{tr}}{m_1 r_l}\left(r - \rho_{1n}\cos\alpha\right), \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3} r\sin 2\varphi' + \frac{F_{tr}}{m_1 r_l}\rho_{1n}\sin\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание, что $\dot{\vec{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 \vec{e}_{z_1}$, и учитывая, что орты $\overline{e}_{Zc}$ и $\overline{e}_{z_1}$ ССК и ССК(Т) совпадают, (3) представим в виде

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{1}{J_{z_1}}\frac{\rho_{1n} r\sin\alpha}{r_l} F_{tr}, \quad (9)$$

где $\dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}$, J_{z_1} – момент инерции концевого тела относительно оси O_{z_1}.

Таким образом, с учетом (7), (8) система уравнений (1) примет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu}{R^3} r\left(3\cos^2\varphi' - 1\right) - \frac{F_{tr}}{m_1 r_l}\left(r - \rho_{1n}\cos\alpha\right), \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3} r\sin 2\varphi' + \frac{F_{tr}}{m_1 r_l}\rho_{1n}\sin\alpha, \\ &\dot{\omega}_1 = -\frac{1}{J_{z_1}}\frac{\rho_{1n} r\sin\alpha}{r_l} F_{tr}. \end{aligned} \quad (10)$$

Записанные уравнения движения КТС (10) позволяют получить замкнутую систему уравнений 1-го порядка с 6-тью неизвестными.

Выводы. Таким образом, предложена математическая модель динамики вращающейся КТС, состоящей из материальной точки и концевого тела, соединенных упругой невесомой нитью. Данная модель позволяет провести анализ влияния динамики концевого тела на движение рассматриваемой КТС с учетом влияния инерциальных характеристик концевого тела, жесткости нити и угловой скорости собственного вращения системы, что позволит в дальнейшем провести оценки взаимовлияния колебаний концевого тела и собственного вращения системы и возможности возникновения резонансов в движении системы.

1. *Cartmell M. P.* A review of space tether research. Aerospace Sciences. 2008. № 44. P. 1 – 21.
2. *Волошенюк О. Л., Пироженко А. В., Храмов Д. А.* Космические тросовые системы – перспективное направление космической техники и технологии. Космічна наука і технологія. 2011. Т. 17, № 2. С. 32 – 44.
3. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Динамика космических тросовых систем. М. 1990. 329 с.
4. *Alpatov A., Dranovskii V., Khoroshilov V., Pirozhenko A., Zakrzhevskii A.* Research of dynamics of space cable systems stabilized by rotation. 48-th International Astronautical Congress, Turin, Italy, October 6–10, 1997. P. 10–20. IAF–97–A.3.01.
5. *James H. G., Yau A. W. and Tyc G.* Space research in the BICEPS experiment. Fourth International Conference on tether in Space. Washington, 10-14 April, 1995. P. 1585 – 1598.
6. *Lorenzini E.C., Cosmo M. L.* Mission analysis of spinning systems for transfers from low orbits to geostationary. Journal of Spacecraft and Rockets. 2000. V.37, № 2. P.165 – 172.
7. *Волошенюк О. Л., Пироженко А. В.* Математическая модель динамики космической тросовой системы, стабилизированной вращением. Техническая механика. 2004. № 2. С. 17 – 27.
8. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. М. 1983. 519 с.
9. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. Изд. 3, испр. и доп. М. 2009. 432 с.
10. *Волошенюк О. Л., Пироженко А. В.* Анализ частот и характеристик переходных процессов космической тросовой системы, стабилизированной вращением. Техническая механика. 2005. № 1. С. 13 – 21.

Получено 16.03.2017,
в окончательном варианте 20.03.2017