УДК 539.3

В. С. ГУДРАМОВИЧ, В. М. ЛЕВИН, Э. Л. ГАРТ, А. В. РЕПРИНЦЕВ, С. А. РЯБОКОНЬ, Е. В. САМАРСКАЯ, С. В. ШАБЕЛЬНИК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ОБЪЕКТОВ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель: численное исследование напряженно-деформированного состояния пластинчатых элементов железобетонных конструкций теплоэнергетики, содержащих произвольно ориентированные протяженные включения, в зависимости от сочетания жесткостных параметров включений, их размеров и ориентации, соотношения жесткостей включений и пластины. **Метод:** проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов. **Результаты:** получены характеристики параметров напряженно-деформированного состояния в бетонной матрице и арматурных стержнях пластинчатых конструкций с прямоугольным вырезом для различных величин сжимающей нагрузки и коэффициентов армирования. Рассмотрены вопросы определения значения предельных нагрузок, приводящих к появлению пластических деформаций и возникновению трещин. Разработаны программы расчета указанных параметров.

Ціль: числове дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів залізобетонних конструкцій теплоенергетики, що містять довільно орієнтовані протяжні включення, залежно від поєднання жорсткістних параметрів включень, їх розмірів та орієнтації, співвідношення жорсткостей включень і пластини. **Метод:** проекційно-ітераційні модифікації методу скінченних елементів. **Результати:** отримані характеристики параметрів напружено-деформованого стану в бетонній матриці і арматурних стержнях пластинчастих конструкцій з прямокутним вирізом для різних величин стискаючого навантаження і коефіцієнтів армування. Розглянуто питання визначення значення граничних навантажень, що призводять до появи пластичних деформацій і виникнення тріщин. Розроблено програми розрахунку зазначених параметрів.

The work objective is to study of a stressed-strained state of plate members of reinforced concrete constructions for heat power engineering with arbitrarily oriented extended inclusions depending on a combination of the stiffness parameters of inclusions, their sizes and orientation, relations of stiffness of inclusions and the plate. Projection-iteration modifications of the finite-element method are employed. Parametric characteristics of stressed-strained states of a concrete matrix and reinforcement bars of plate constructions with a rectangular cut are obtained for different compressible loads and reinforcement coefficients. Problems of the determination of the limiting load values resulting in plastic strains and cracks are discussed. Programs for calculating the above parameters are developed.

Ключевые слова: *Железобетонные конструкции теплоэнергетики, пластинчатые элементы, протяженные включения, пластические деформации*

Введение. Железобетон относится к широко распространенным в современной технике и строительстве композиционным материалам. Конструкции из железобетона используются во многих сооружениях. Эксплуатационные нагрузки, расчетные модели механики железобетона и существующие методы расчета сооружений описаны во многих литературных источниках, из которых выделим [1 – 10].

Железобетонные пластинчато-оболочечные конструкции башенных сооружений, в которых сочетается необходимая прочность и жесткость с минимальным весом, широко используются в современной энергетике. К таким сооружениям относятся башенные копры для добычи полезных ископаемых, градирни, угольные и гасильные башни коксохимзаводов, дымовые трубы, а также сооружения связи и транспорта – телевизионные башни, опоры и пилоны мостов.

Эти сооружения являются крупногабаритными. Технологии их изготовления достаточно трудоемки.

Башенные сооружения имеют различные вырезы-отверстия. Они технологически необходимы, т. е. изготовлены специально для выполнения разных эксплуатационных и технологических операций, ремонта и прочее. Как правило, такие вырезы являются прямоугольными, но возможно и существование отверстий с криволинейными контурами (круговыми, эллиптическими). В процессе эксплуатации сооружения могут приобретать повреждения, которые также моделируются отверстиями различной формы.

Стенки башенных сооружений можно моделировать пластинами с отверстиями. Наличие отверстий приводит к концентрации напряжений, что может вызвать досрочное разрушение конструкции или появление недопустимых деформаций.

При эксплуатации в бетоне могут возникать трещины, что приводит к необходимости корректировки соответствующих расчетных моделей.

На рис. 1 показаны башенные копры для добычи полезных ископаемых, на рис. 2 – градирни. Эти сооружения имеют вырезы, в основном прямоугольной формы.

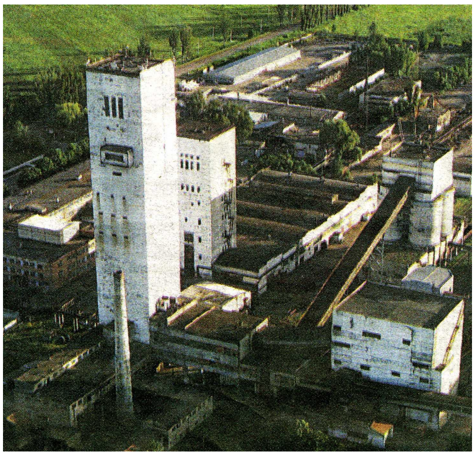



Рис. 1

Рис. 2

Оценка реальной работоспособности железобетонных сооружений возможна только при учете пластического деформирования материала. Нелинейность деформирования бетона и появление пластических деформаций начинаются с достаточно низкого уровня нагрузок. В рамках деформационной теории пластичности предложены достаточно адекватные модели; прежде всего, следует отметить расчетные модели, предложенные в [1 – 3, 11]. Теория течения позволяет учитывать достаточно широкий класс траекторий нагружения. Варианты ее рассмотрены в [12 – 15].

При учете пластических деформаций строятся схемы последовательных приближений, при которых в каждом приближении решается задача теории упругости, и вычисления продолжаются до совпадения двух последовательных приближений с заданной точностью. Эти идеи отражены при решении многих конкретных задач в [16 – 18]. Основной использованный нами метод решения упругопластических задач, основанный на схемах последовательных приближений, – метод переменных параметров упругости.

Расчетная методика основана на применении метода конечных элементов (МКЭ).

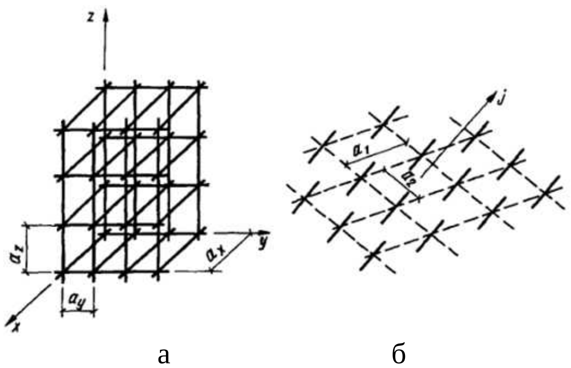
В данной работе используются разработанные проекционно-итерационные схемы МКЭ. Их суть, основные особенности и применение к решению различных задач напряженно-деформированного состояния элементов неоднородных пластинчато-оболочечных конструкций показаны во многих работах, из которых выделим [19 – 27].

Основные преимущества проекционно-итерационных схем МКЭ – существенное (в ряде задач в десятки раз) уменьшение времени компьютерного расчета по сравнению с традиционным МКЭ на одной мелкой сетке. С увеличением размерности решаемых конечномерных задач эффективность проекционно-итерационных модификаций возрастает.

Применение проекционно-итерационных вариантов МКЭ к решению широкого класса краевых задач теории упругости и пластичности свидетельствует об их эффективности по сравнению с традиционным МКЭ при незначительном усложнении вычислительного алгоритма и при достаточной степени точности, приемлемой для практики, гарантирует получение достоверных результатов.

Постановка задачи. Используемые модели деформирования железобетона. Метод решения. Рассматривается пластинчатый прямоугольный элемент стенки башенного железобетонного сооружения теплоэнергетики с прямоугольным отверстием. При использовании проекционно-итерационного варианта МКЭ форма отверстия может быть различной [23 – 25]. Пластина является анизотропной, выделяются 4 стадии деформирования: упругое (1), упругопластическое (2) (до образования трещин), упругое деформирование в трещинах (3) и упругопластическое – в растянутой арматуре (4) (в пластине с трещинами). Приведем основные соотношения, описывающие эти варианты деформирования [1, 4].

Стадия 1. Выделим 2 основных варианта схем армирования: ортотропное (а) и наклонное (б) (рис. 3). Каждый вариант характеризуется коэффициентом армирования μ_i арматуры.



а б

Рис. 3

Для (а)

$$\mu_x = A_x / a_y a_z \,;\ \mu_y = A_y / a_x a_z \,;\ \mu_z = A_z / a_x a_y \,, \qquad (1)$$

где A_i – суммарные площади поперечных сечений стержней арматуры, расположенных вдоль осей i ($i = x, y, z$).

Для (б)

$$\mu_j = A_j / a_1 a_2 \,, \qquad (2)$$

где A_j – площади отдельных стержней j-го направления.

Деформация арматуры и бетона (обозначено знаками s и b соответственно) равны:

$$\varepsilon_x^s = \varepsilon_x^b = \varepsilon_x \,;\ \varepsilon_y^s = \varepsilon_y^b = \varepsilon_y \,. \qquad (3)$$

Для векторов усилий в бетоне имеем

$$F_x^b = D_x^b \vec{\varepsilon} \,;\ F_y^b = D_y^b \vec{\varepsilon} \,, \qquad (4)$$

где D_x^b, D_y^b – матрицы бетона;

$$D_x^b = E^b h \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2\left(1+\nu^b\right)} & \dfrac{1}{2\left(1+\nu^b\right)} \\ \dfrac{1}{1-\nu^{b2}} & \dfrac{\nu}{1-\nu^{b2}} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D_y^b = E^b h \begin{bmatrix} \dfrac{\nu}{1-\nu^{b2}} & \dfrac{1}{1-\nu^{b2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2\left(1+\nu^b\right)} & \dfrac{1}{2\left(1+\nu^b\right)} \end{bmatrix};$$

E^b, ν^b – модуль упругости и коэффициент Пуассона бетона; h – толщина пластины; $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}\right)$ – вектор деформаций.

При этом

$$F_x^b = \left(\tau_{xy}^b, \sigma_x^b\right);\ F_y^b = \left(\sigma_y^b, \tau_{yx}^b\right), \qquad (5)$$

где σ_x^b, σ_y^b, τ_{xy}^b, τ_{yx}^b – нормальные и касательные напряжения в бетоне.

Для арматуры

$$F_x^s = D_x^s \vec{\varepsilon} \,;\ F_y^s = D_y^s \vec{\varepsilon} \,, \qquad (6)$$

где $D_x^s = \mu_x h E_x^s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $D_y^s = \mu_y h E_y^s \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; E_x^s, E_y^s – модули упругости арматурных стержней, параллельных осям Ox и Oy; μ_x, μ_y – коэффициенты армирования в направлении этих осей.

Тогда

$$F_x = F_x^b + F_x^s = D_x\vec{\varepsilon}\,;\; F_y = F_y^b + F_y^s = D_y\vec{\varepsilon}\,,$$

где $D_x = D_x^b + D_x^s$; $D_y = D_y^b + D_y^s$.

Вариационная постановка задачи заключается в нахождении перемещений $u(x,y)$, $v(x,y)$, минимизирующих функционал энергии

$$I[u,v] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \left(\frac{E^b}{1-\nu^{b2}} + \mu_x E_x \right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{E^b}{1-\nu^{b2}} + \mu_y E_x \right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu^b E^b}{1-\nu^{b2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E^b}{2\left(1+\nu^b\right)} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} - \int_{\Gamma_p} \left(p_x u + p_y v \right) ds, \qquad (7)$$

где p_x, p_y – проекции нагрузки p на оси Ox и Oy соответственно; Γ_p – граница пластины, на которой приложена нагрузка.

Стадия 2. Связь между октаэдрическим напряжениями τ_0 и сдвигами γ_0 (для деформационной теории) запишем в виде

$$\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0\,, \qquad (8)$$

где $\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_y\right)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)}$; $G(\gamma_0)$ – секущий модуль сдвига.

Связь между октаэдрическим нормальными напряжениями σ_0 и деформациями γ_0 нелинейна и имеет вид

$$\sigma_0 = K(\gamma_0)\left(\varepsilon_0 - \rho\gamma_0^2\right), \qquad (9)$$

где ρ – модуль дилатации; $K(\gamma_0)$ – секущий модуль объемных деформаций.

Для определения модулей $G(\gamma_0)$, $K(\gamma_0)$ используется гипотеза, подобная гипотезе «единой кривой деформирования», согласно которой форма связи между напряжениями и деформациями не зависит от вида напряженного состояния [1, 16, 18], т. е. связь между τ_0 и γ_0 такая же, как для одноосного нагружения.

Для $G(\gamma_0)$ можно взять такую зависимость [1, 4, 15]

$$G(\gamma_0) = G_0^b f(\gamma_0)\,, \qquad (10)$$

где $G_0^b = E^b \big/ \left[2\left(1+\nu^{b2}\right)\right]$ – начальный модуль сдвига; $f(\gamma_0) = \left(1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3\right)^{-1}$; $\eta = \gamma_0\bar{\gamma}_0^{-1}$; $\bar{\gamma}_0$ – предельные деформации октаэдрического сдвига; $A = C + \lambda - 2$; $C = \lambda(1-\xi_r)\left[\xi_r(\eta_r - 1)^2\right] - \eta_r^{-1}$; $\lambda = 1{,}5 \div 2{,}2$ – параметр нелинейности; $\eta = \varepsilon/\varepsilon_c$; $\xi = \sigma/R_c$; ε_c, R_c – предельные деформации сжатия и напряжения; ε, σ – деформации и напряжения при одноосном сжатии; $B = 1 - 2C$; $\xi_r \approx 0{,}85$; $\eta_r \approx 1{,}41$ – координаты условной точки на ниспадающей части диаграммы $\xi - \eta$.

Аналогично для $K(\gamma_0)$ имеем

$$K(\gamma_0) = K_0^b f(\gamma_0), \tag{11}$$

где $K_0^b = E^b / \left(1 - 2\nu^{b2}\right)$ – начальный объемный модуль.

Соотношение (9) преобразуется к виду

$$\sigma_0 = K(\gamma_0)\left(1 - \rho\gamma_0^2\varepsilon_0^{-1}\right) = \bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_0, \tag{12}$$

где $\bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0)$ – объемный модуль, учитывающий дилатацию.

Модуль упругости и коэффициент Пуассона бетона связаны с объемными модулями так

$$E^b = \frac{3\bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0)G(\gamma_0)}{G(\gamma_0) + \bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0)}; \; \nu^b = \frac{\bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G(\gamma_0)}{2\left(G(\gamma_0) + \bar{K}(\varepsilon_0, \gamma_0)\right)}. \tag{13}$$

Во многих исследованиях по железобетону используется предположение о связи предельных деформаций $\bar{\gamma}_0$ в (10) и предельного октаэдрического напряжения $\bar{\tau}_0$ через модуль сдвига бетона G^b

$$\bar{\gamma}_0 = \lambda\bar{\tau}_0 G^b. \tag{14}$$

Статистическая обработка результатов экспериментов при трехосном сжатии дает

$$\bar{\gamma}_0 = 7{,}97\left(\frac{\bar{\tau}_0}{R_c}\right)^2 + 15{,}22\frac{\bar{\tau}_0}{R_c} - 3{,}713. \tag{15}$$

Стадия 3. Важной особенностью железобетона является допустимость образования трещин в процессе деформирования. Полагаем, что трещины в железобетоне образуются по главным площадкам, когда нарушаются условия прочности

$$F(\sigma_0, \tau_0, \theta) \geq 0 \tag{16}$$

(одно или несколько главных напряжений при этом являются растягивающими).

Различные варианты определяющих соотношений для железобетона с трещинами с учетом взаимовлияния трещин и арматуры рассмотрены в [1].

Стадия 4. Упругопластическое деформирование в растянутых стержнях арматуры определяется зависимостями между интенсивностями деформаций ε_i и напряжений σ_i. Имеются различные варианты таких зависимостей [18]. Приведем некоторые из них.

Степенная зависимость

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} + C\left(\frac{\sigma_i - \sigma_p}{\sigma_{o2} - \sigma_p}\right)^n, \tag{17}$$

где σ_p – предел пропорциональности.

Экспоненциальная зависимость

$$\sigma_i = \sigma_p \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_p} \right) \right]. \qquad (18)$$

Линейное упрочнение

$$\sigma_i = E\varepsilon_i + E_1 \left(\varepsilon_i - \varepsilon_p \right), \qquad (19)$$

где E_1 – тангенс угла наклона второго участка диаграммы.

Для мягких сталей может быть использована диаграмма, вид которой показан на рис. 4 [1].

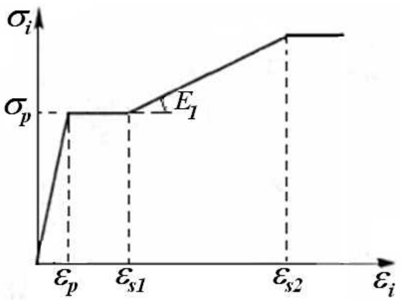


Рис. 4

Для твердых сталей следует ограничиться первыми двумя участками диаграммы. Диаграммы справедливы как при растяжении, так и при сжатии.

Основным методом, используемым нами, является проекционно-итерационная модификация метода конечных элементов. Отметим, что МКЭ традиционно используется при расчетах железобетонных сооружений, в частности сооружений теплоэнергетики [2, 10, 13, 14].

Основная идея модификации МКЭ заключается в следующем [19 – 22]. При использовании МКЭ проводится достаточно грубое разбиение элементов конструкций. Дискретизированная вариационная задача решается с помощью итерационных методов, но не до конца (строятся лишь несколько приближений к решению). Полученное приближение интерполируется на более мелкую сетку. Вычисления продолжаются до достижения заданной точности между соседними приближениями. Применение такого алгоритма значительно ускоряет процесс расчета по сравнению с расчетом на основе традиционного МКЭ на одной мелкой сетке. Могут быть использованы прямоугольные или треугольные элементы (оптимально их сочетание). Проекционно-итерационные модификации МКЭ с успехом были применены во многих задачах деформированного твердого тела (механика разрушения, теория пластин и оболочек неоднородной структуры, в частности при наличии отверстий, при пластических деформациях) [23 – 26]. Уменьшение компьютерного времени расчета особо важно при проектировании сооружений [27].

Результаты численного анализа. Конструктивный элемент стенки сооружения теплоэнергетики моделируется пластиной с прямоугольным отверстием, находящейся под действием сжимающей нагрузки.

При численной реализации целесообразно использовать четырехугольные конечные элементы (КЭ). Перемещения по области элемента принимаются в виде билинейных функций координат, зависящих от узловых значений перемещений в каждой из 4-х вершин КЭ. В результате интегрирования по каждому КЭ функционал (7) заменяется функцией многих переменных относительно неизвестных узловых перемещений. Из необходимых условий минимума получим шаблонные формулы для узловых перемещений. В дальнейшем алгоритм вычисления, связанный с разработкой проекционно-итерационных схем МКЭ, связан с использованием метода последовательной верхней релаксации [19 – 21]. Учет пластических деформаций проводится на основе метода переменных параметров упругости с построением схем последовательных приближений, в каждом из которых решаются неоднородные задачи теории упругости с переменными параметрами упругости, которые перед решением каждой задачи определяются по формулам (13). Особенности строения конструктивного элемента и нагружения таковы, что его можно считать находящимся в плоском напряженном состоянии. Формула для γ_0 в (8) записывается в виде

$$\gamma_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{1-\nu^b+\nu^{b2}}{3\left(1-\nu^b\right)^2}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)^2-\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}\,, \qquad (20)$$

а напряжения для бетона определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{2G^b}{1-\nu^b}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\nu^b\frac{\partial v}{\partial \eta}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{2G^b}{1-\nu^b}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\nu^b\frac{\partial u}{\partial \xi}\right); \qquad (21)$$

$$\tau_{xy} = G^b\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$

с заменой производных их конечноэлементным аналогом.

Пластинчатый элемент железобетонного сооружения представлен на рис. 5. В расчетах использованы диаграммы деформирования для бетона разных классов (B10, B15, B20, B25, B40).

На рис. 5,а показаны размеры рассчитываемого пластинчатого железобетонного элемента. На рис. 5,б – распределение зон пластичности, на рис. 5,в – распределение интенсивностей напряжений (в МПа) в матрице из бетона класса B40.

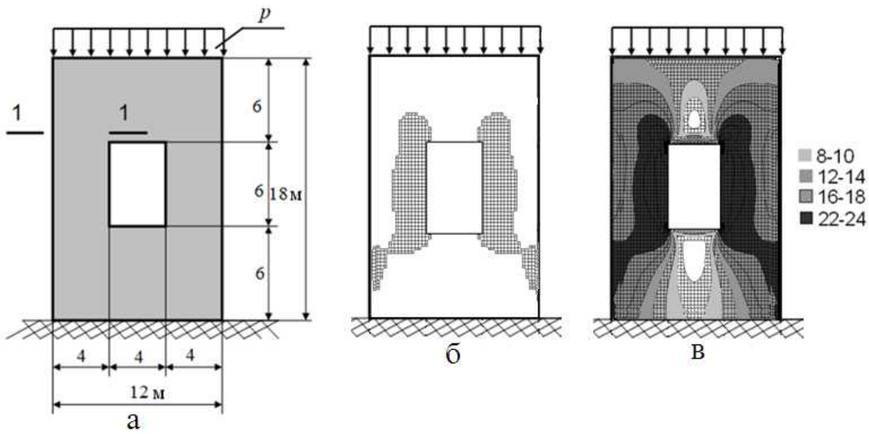


Рис. 5

На рис. 6 показано распределение напряжений σ_x^s и σ_y^s в сечении 1-1 (рис. 5,а) в стальных арматурных стержнях (величины коэффициентов армирования A_x =0,0005; A_y =0,006) для бетона класса В25 при сжимающих нагрузках 7,16 МПа (сплошная кривая); 7,06 МПа (пунктирная); 7,25 МПа (пунктирная с точкой).

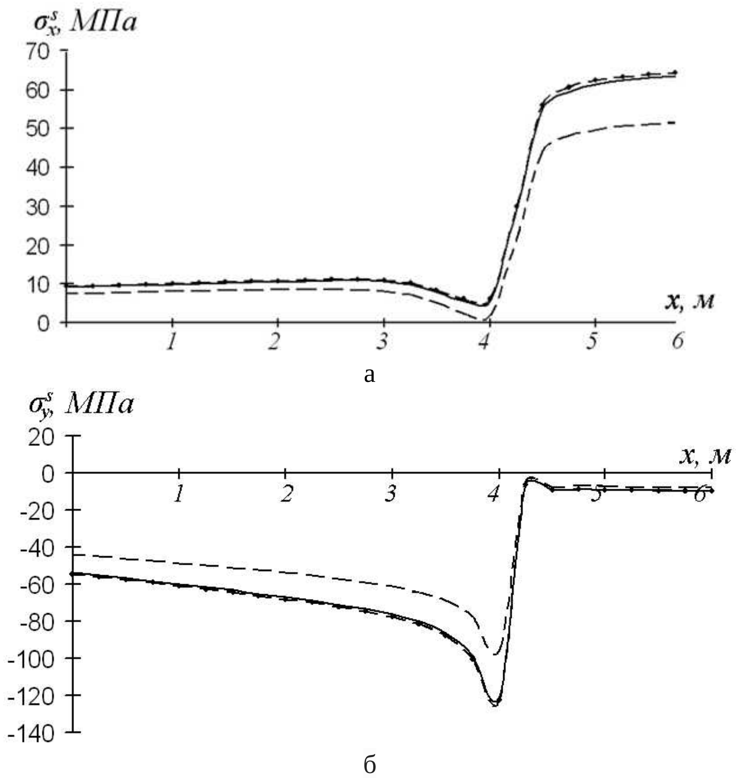


Рис. 6

На рис. 7 показано распределение напряжений σ_x^s и σ_y^s в арматурных стержнях в сечении 1-1 (рис. 5,а) в зависимости от класса бетона. Сплошной, пунктирной и пунктирной с точкой кривыми показаны напряжения для классов В25, В20, В40 при коэффициентах армирования A_x =0,0005; A_y =0,004 и сжимающей нагрузке 5,8 МПа.

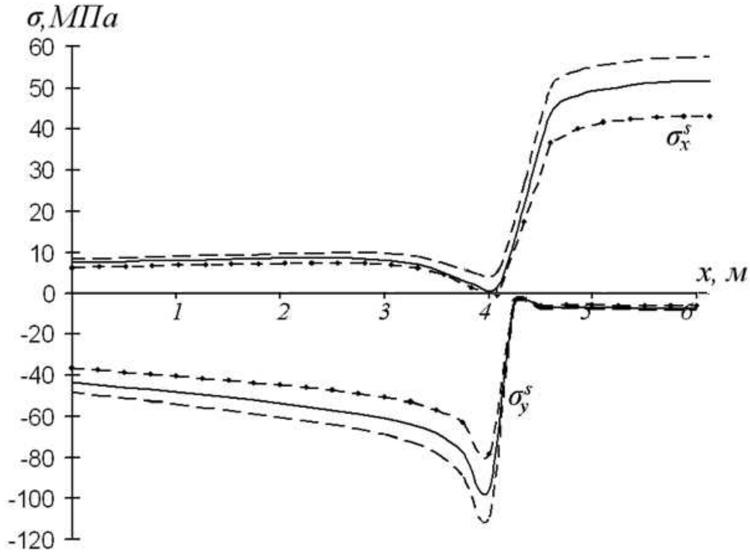


Рис. 7

На рис. 8 показано, как влияет изменение коэффициента армирования A_y на распределение напряжений в арматурных стержнях. Сплошной и пунктирной линиями показаны напряжения для A_y =0,004 и A_y =0,008 при одном и том же A_x =0,0005 при нагрузке 7,16 МПа. Это влияние незначительно.

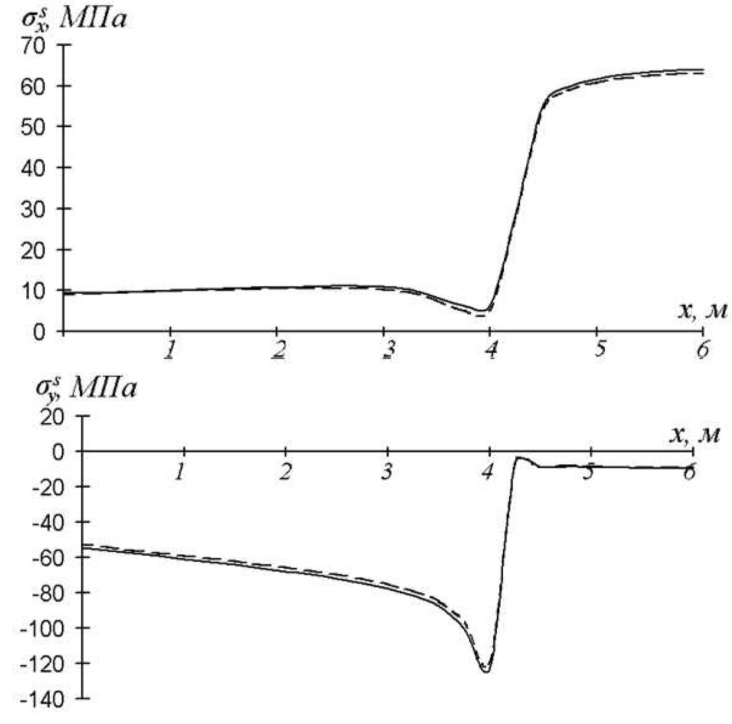


Рис. 8

На основе разработанных алгоритмов расчета можно определить нагрузки, приводящие к появлению пластических деформаций или к появлению трещин. Таким образом, подбирая класс бетона и арматуру (вид арматуры и ее параметры), можно определить необходимые запасы прочности элементов конструкций железобетонных сооружений теплоэнергетики. Использование проекционно-итерационных схем МКЭ позволяет значительно уменьшить компьютерное время расчета по сравнению с традиционным МКЭ для пластинчатого элемента железобетонных конструкций (для рассмотренных классов материала и видов армирования от 20 до 40 раз).

Выводы. Рассмотренные алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния элементов железобетонных конструкций объектов теплоэнергетики позволяют исследовать ряд важных вопросов их эксплуатации. Использование проекционно-итерационных схем МКЭ позволило существенно уменьшить время расчета параметров НДС (напряжения и деформации) и предельных состояний (нагрузки, вызывающие появление пластических деформаций или появление трещин в бетоне) по сравнению с традиционным МКЭ на одной мелкой сетке (уменьшение времени расчета в зависимости от класса бетона, вида армирования для пластинчатых элементов с прямоугольными отверстиями составило от 20 до 40 раз).

Варьирование классов бетона, параметров армирования позволяет определить необходимые запасы прочности конструкций.

Результаты исследований целесообразно использовать при оптимальном проектировании сооружений теплоэнергетики. Они могут быть также применены для других конструкций из композитных материалов, неоднородность которых моделируется схемой: основной материал и высокопрочные подкрепляющие элементы. В частности, возможно использование результатов для элементов конструкций аэрокосмической техники.

1. *Карпенко Н. И.* Общие модели механики железобетона / *Н. И. Карпенко.* – М. : Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. *Левин В. М.* Железобетонные башенные сооружения. Исследования, расчет / *В. М. Левин*. – Макеевка : ДонГАСА, 1999. – 230 с.
3. *Корсун В. И.* Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий / *В. И. Корсун.* – Макеевка : ДонГАСА, 2004. – 153 с.
4. Научные основы обеспечения надежности и экономичности шахтных копров / *В. Н. Кущенко, В. М. Левин, В. Ф. Мущанов и др.* – Макеевка : ДонНАСА, 2012. – 462 с.
5. Прогрессирующее разрушение железобетонных конструкций / *В. М. Левин, В. С. Гудрамович, В. А. Митраков и др.* // Пространственные конструкции зданий и сооружений. – М. : Девятка принт, 2009. – Вып. 12. – С. 214 – 223.
6. *Pinfold G. M.* Reinforced concrete chimneys and towers / *G. M. Pinfold*. – London : Press Limited, 1975. – 233 p.
7. *Леонгардт Ф.* Предварительно напряженный железобетон : пер. с нем. / *Ф. Леонгардт.* – М. : Стройиздат, 1983. – 235 с.
8. Железобетонные стены сейсмостойких зданий. Исследования и основы проектирования / Под ред. *Ашкинадзе Г. Н., Соколова М. Е.* – М. : Стройиздат, 1988. – 499 с.
9. Напряжённое состояние армированной вязкоупругопластической пластины при сложном нагружении / *В. М. Левин, В. С. Гудрамович, В. А. Митраков и др.* // Теоретическая и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 118 – 124.
10. Анализ напряженно-деформированного состояния пластических армированных элементов башенных сооружений с отверстиями / *Э. Л. Гарт, Ю. В. Грицук, В. С. Гудрамович, В. М. Левин, С. А. Рябоконь* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : Ліра. – 2012. – Вип. 19. – С. 54 – 64.
11. *Гениев Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона / *Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин.* – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
12. *Grasse P.* Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law / *P. Grasse, K. Landgren, K. Gylltoft* // Int. I. Solid Struct. – 2002. – V. 39, Issue 20. – P. 5205 – 5223.
13. *Агапов В. П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций / *В. П. Агапов.* – М. : Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2004. – 248 с.
14. *Кловании С. Ф.* Метод конечных элементов в механике железобетона / *С. Ф. Кловании, И. Н. Мироненко*. – Одесса : Изд-во Одесского нац. морского ун-та, 2007. – 111 с.

15. Modeling of the deformation process of concrete based on a modified version of the theory of flow / *V. S. Hudramovich, V. M. Levin, E. V. Samarskaja, S. V. Shabelnik* // Strength of Materials. – 2014. – V. 46, Issue 5. – P. 595 – 600.
То же: Моделирование процесса деформирования бетона на основе модифицированного варианта теории течения / *В. С. Гудрамович, В. М. Левин, Е. В. Самарская, С. В. Шабельник* // Проблемы прочности. – 2014. – № 5. – С. 20 – 26.
16. *Ильюшин А. А.* Труды : в 4 т. Т. 2. Пластичность: 1946–1966 / *А. А. Ильюшин.* – М. : Физматлит, 2004. – 479 с.
17. *Биргер М. А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред / *М. А. Биргер*. – М. : Наука, 1975. – С. 51 – 73.
18. *Гудрамович В. С.* Устойчивость упругопластических оболочек / *В. С. Гудрамович.* – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.
19. Приближенное решение операторных уравнений / *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.* – М. : Наука, 1969. – 455 с.
20. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / *А. А. Самарский, Е. С. Николаев.* – М. : Наука, 1978. – 592 с.
21. *Марчук Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / *Г. И. Марчук, В. И. Агошков.* – М. : Наука, 1981. – 416 с.
22. *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method / *E. L. Hart* // J. Math. Sci. – 2010. – V. 167, No. 1. – P. 76 – 88.
23. *Гудрамович В. С.* Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями / *В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт* // Упругость и неупругость : междун. симп., посв. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина : матер., 2011 г., Москва. – М. : Изд. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 144 – 147.
24. *Hart E. L.* Applications of the projective-iterative versions of FEM in damage problems for engineering structures / *E. L. Hart, V. S. Hudramovich* // Maintenance-2012 : 2 Int. Conference, 2012, Zenica, Bosnia and Herzegovina : Proceedings. – Zenica : Univ. of Zenica, 2012. – P. 157 – 164.
25. *Hudramovich V. S.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / *V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Ryabokon'* // J. Eng. Math. – 2013. – V. 78, No. 1. – P. 181 – 197.
26. *Hart E. L.* Projection-iterative schemes for realization of the finite element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions / *E. L. Hart, V. S. Hudramovich* // J. Math. Sci. – 2014. – V. 203, No. 1. – P. 55 – 69.
То же: *Гарт Е. Л.* Проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів в задачах деформування пластин з отворами та включеннями / *Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович* // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 48 – 59.
27. *Гудрамович В. С.* Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики / *В. С. Гудрамович* // Техн. механика. – 2013. – № 4. – С. 97 – 104.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск,

Днепропетровский национальный
университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск,

Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры,
Макеевка

Получено 28.04.15,
в окончательном варианте 20.05.15