УДК 539.3 https://doi.org/10.15407/itm2024.01.066

Е. Л. ГАРТ, О. О. СЕМЕНЧА

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ СТРІЧКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА КОНЦЕНТРАЦІЮ НАПРУЖЕНЬ В ТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ І КОНІЧНИХ ОБОЛОНКАХ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Гагаріна, 72, 49010, Дніпро, Україна; e-mail: hart@ua.fm, semencha.aleksey@gmail.com

Тонкостінні пластинчато-оболонкові конструкції широко застосовуються у різноманітних галузях техніки і народного господарства, зокрема в аерокосмічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві та ін. Часто суцільність таких конструкцій порушується різними неоднорідностями у вигляді отворів, включень, виточок, тріщин тощо, які є локальними концентраторами напружень. Зменшення концентрації напружень, що виникають в околі таких конструктивних або структурних неоднорідностей, є важливою задачею механіки деформованого твердого тіла. Зокрема, актуальним завданням сучасного машинобудування при проєктуванні нової техніки є істотне зниження матеріаломісткості й зростання ресурсу литих деталей з урахуванням застосування нових матеріалів і технологій. Такі деталі відповідають за конкурентоспроможність нової техніки для різних галузей виробництва.

У цьому дослідженні виконане числове моделювання та аналіз напружено-деформованого стану тонкостінних циліндричних і зрізаних конічних оболонок з прямокутними отворами й стрічковими включеннями навколо них. Матеріал включень має властивості, що відрізняються від базового матеріалу оболонок. Досліджено вплив геометричних і механічних характеристик включень на параметри напруженодеформованого стану оболонок в околі отворів при варіюванні величини модуля пружності матеріалу включення та його ширини. Для визначеності прийнято, що включення однорідні та розташовані у площині оболонки. Одержано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в зонах локальної концентрації напружень. Здійснено порівняльний аналіз отриманих числових результатів для оболонок обох форм із відповідними результатами для оболонок із круговим отвором. Дослідження показали, що наявність «м'якого» однорідного стрічкового включення сприяє зниженню концентрації напружень навколо прямокутних отворів на ~ (21 – 54) % в залежності від ширини включення та його модуля пружності як у циліндричних, так і у конічних оболонках. На відміну від випадку оболонок із круговим отвором тут наявність включень не призводить до появи механічного ефекту зсуву локації концентрації параметрів напруженодеформованого стану від контура отвора до межі поділу матеріалів.

Ключові слова: *тонкостінна циліндрична оболонка, тонкостінна зрізана конічна оболонка, прямокутний отвір, стрічкове включення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.*

Thin-walled plate-shell structures are widely used in various branches of technology and the national economy, in particular in the aerospace industry, the oil and gas industry, power engineering, construction, etc. The continuity of such structures is often disrupted by various inhomogeneities in the form of openings, inclusions, recesses, cracks, etc., which are local stress concentrators. Reducing the concentration of the stresses that develop in the vicinity of such structural inhomogeneities is an important problem in deformable solid mechanics. In particular, a pressing problem in the design of new equipment in modern mechanical engineering is a significant reduction in material consumption and an increase in the service life of cast parts taking into account the use of new materials and technologies. Such parts are responsible for the competitiveness of new equipment for various industries.

This paper presents the results of a numerical simulation and analysis of the stress and strain field of thin-walled cylindrical and truncated conical shells with rectangular openings and tape inclusions around them. The material of the inclusions has properties that differ from those of the base material of the shells. The effect of the geometrical and mechanical characteristics of the inclusions on the parameters of the stress and strain field in the vicinity of the openings was studied by varying the elastic modulus of the inclusion material and the inclusion width. For definiteness, the inclusions were assumed to be homogeneous and located in the shell plane. The stress and strain intensity distributions in the zones of local stress concentration were obtained. The numerical results for shells of both shapes were compared with the corresponding results for shells with a circular opening. The study showed that the presence of a "soft" homogeneous tape inclusion helps in reducing the stress concentration around rectangular openings by ~ (21 – 54) % depending on the width of the inclusion and its elastic modulus, both in cylindrical and in conical shells. Unlike shells with a circular opening, in this case the presence of inclusions does not cause the mechanical effect of shifting the stress concentration zone from the contour of the opening to the interface between the materials.

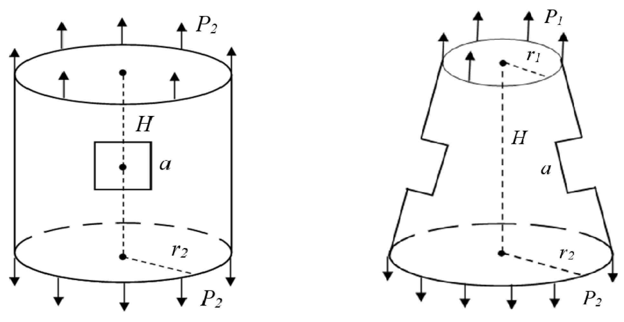
Keywords: *thin-walled cylindrical shell, thin-walled truncated conical shell, rectangular opening, tape inclusion, stress and strain field, stress concentration factor, finite-element method.*

Вступ. Оболонкові конструкції з отворами широко використовуються в різних галузях техніки і промисловості, таких як ракетно-космічна, машинобудування, нафтогазовий сектор, енергетика, будівництво тощо. Пластинчато-оболонкові елементи тонкостінних конструкцій відрізняються високою міцністю при відносно невеликій вазі, що сприяє їх широкому застосуванню. Слід зазначити, що структурна неоднорідність більшості таких конструкцій, наявність у них різноманітних отворів, виточок, викружок, включень тощо, призводить до значного підвищення локальних напружень в околі концентраторів, що впливає на загальну міцність та надійність конструкції в цілому. Це обумовлює актуальність проведення досліджень у напрямку пошуку можливих шляхів зменшення концентрації напружень у таких конструкціях та є актуальною проблемою механіки деформованого твердого тіла.

Проблемі розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) і оцінці міцності пластинчато-оболонкових елементів конструкцій з різними отворами і пошкодженнями присвячена обширна бібліографія. Застосовано аналітичні [4, 5, 7, 8, 10, 11, 13], числові [2, 3, 9, 12, 14] та експериментальні методи [6].

Одним із найпоширеніших універсальних та ефективних методів аналізу прикладних задач механіки деформованого тіла є метод скінченних елементів (МСЕ) [15]. У цій роботі за допомогою МСЕ проведено дослідження впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) в циліндричних і зрізаних конічних оболонках з квадратними отворами. Здійснено порівняльний аналіз отриманих числових результатів для оболонок обох форм із відповідними результатами для оболонок із круговим отвором [3].

Постановка задачі. Розглянемо НДС тонкостінних пружних однорідних ізотропних циліндричних і зрізаних конічних оболонок товщини h, висоти H з двома однаковими діаметрально протилежними «малими» квадратними отворами зі стороною a, розташованими посередині оболонок. Радіуси верхньої і нижньої основ конічних оболонок – r_1, r_2 відповідно. Радіус основ циліндричних оболонок – r_2. Циліндричні оболонки знаходяться під дією одновісних рівномірних розтягувальних зусиль P_2 (рис. 1, а)), зрізані конічні – під дією одновісних рівномірних розтягувальних врівноважувальних зусиль P_1 і P_2 (рис. 1, б)). Приймаємо, що стрічкове включення навколо отворів розташоване у площині оболонки. Матеріал включення має інші, ніж основний матеріал оболонки, властивості ($E_{вкл} = 2E_0/3;\ E_0/2;\ 2E_0/5;\ E_0/3$, де E_0 – модуль пружності оболонки, $E_{вкл}$ – модуль пружності включення). Ширина включень $h_{вкл}$ варіюється ($h_{вкл} = 0,25a;\ 0,125a;\ 0,0625a$).



а) б)

Рис. 1 – Оболонки з прямокутними отворами: циліндрична (а) та конічна (б)

Мета дослідження полягає в знаходженні раціональних параметрів включень для оболонок з точки зору зменшення величини ККН та здійснення порівняльного аналізу з результатами для відповідних оболонок з круговим отвором [3].

Математичні моделі задач та метод їх розв'язування. Вихідна задача для *циліндричної оболонки* у варіаційній постановці формулюється як задача мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [1]:

$$I[u,v,w]=\sum_{j=1}^{n+1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}\frac{E_j h}{(1-\nu_j^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)^2+2\nu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu_j}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dxdy+\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}\frac{E_j h^3}{12(1-\nu_j^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)^2+\right. \qquad (1)$$

$$\left.\left.+2\nu_j\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{\tilde{R}}\right)+2(1-\nu_j)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\right\}-\int_{\gamma}\left(p_x u+p_y v+p_z w\right)dxdy,$$

де $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ – проєкції вектору переміщень на осі Ox, Oy і Oz відповідно; h – товщина оболонки; $\tilde{R}$ – радіус оболонки; E_j, ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки Ω_1 (матриці) $(j=1)$ і включення Ω_j $(j=\overline{2,n+1},$ n – кількість включень); $\Omega=\bigcup_{j=1}^{n+1}\Omega_j$ – область визначення змінних x та y; γ – границя області Ω, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x,y)=(p_x(x,y),$ $p_y(x,y),\ p_z(x,y))^T$. У разі одновісного навантаження розтягування $p_x(x,y)=p_z(x,y)=0$, $p_y(x,y)=p=\text{const}$.

Для конічної оболонки [10]:

$$I[u,v,w]=\sum_{j=1}^{n+1}\left\{\frac{E_j h}{2(1-\nu_j^2)}\int_{\Omega_j}\left(S_1+S_2\right)^2-2(1-\nu_j)\left(S_1S_2-\frac{1}{4}T_1^2\right)\times\right.$$

$$\times\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]dsd\varphi+$$

$$+\frac{E_j h^3}{24(1-\nu_j^2)}\int_{\Omega_j}\left[\left(K_1+K_2\right)^2-2\left(1-\nu_j\right)\left(K_1K_2-T_2^2\right)\right]\times$$

$$\left.\times\left[R-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\sin\alpha\right]dsd\varphi\right\}-\int_{\gamma}\left(p_x u+p_y v+p_z w\right)d\gamma, \qquad (2)$$

де E_j, ν_j – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки Ω_1 (матриці) $(j=1)$ і включення Ω_j $(j=\overline{2,n+1},$ n – кількість включень); R – радіус нижньої основи оболонки; γ – границя, вздовж якої прикладене зовні-

шнє навантаження інтенсивності $P(x,y)=(p_x(x,y),\ p_y(x,y),\ p_z(x,y))^T$;
α – кут між твірною лінією та віссю конуса; s, φ – координатні лінії (рис. 2);

$$K_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial s},\quad K_2=\left(\frac{1}{s^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}\right]-\frac{\partial w}{s\,\partial s}\right),$$

$$S_1=\frac{\partial u}{\partial s},\quad S_2=\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\,\mathrm{tg}\alpha+w\right),$$

$$T_1=\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{v}{s}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha},\quad T_2=\frac{1}{s\,\mathrm{tg}\alpha}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}-\frac{\partial w}{s\,\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{v}{s}\right].$$

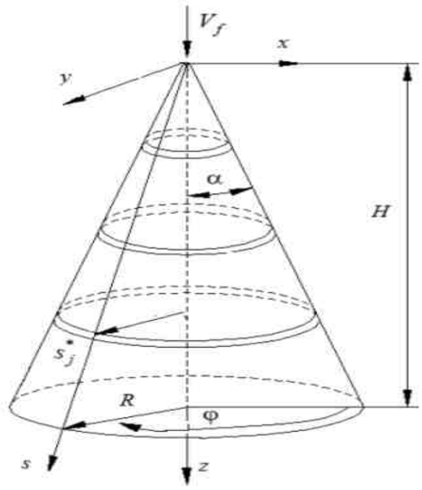


Рис. 2 – Схема конічної оболонки

Радіуси кривини вздовж координатних ліній:

$$R_\varphi=\frac{R}{\cos\alpha}-\left(\frac{H}{\cos\alpha}-s\right)\mathrm{tg}\alpha,\quad R_s=\infty.$$

Сформульовані варіаційні задачі мінімізації функціоналів (1) та (2) розв’язано за допомогою МСЕ. Для побудови скінченно-елементної сітки використано ізопараметричні трикутні шестивузлові лагранжеві скінченні елементи другого порядку. В областях, де спостерігається концентрація напружень, застосовано адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10 (рис. 3). Забезпечення збіжності МСЕ досягається шляхом згущення сітки. Використання дрібнішої сітки у разі застосування плоских скінченних елементів для аналізу тонкостінних оболонок сприяє підвищенню точності апроксимації поверхні оболонки геометрією вписаного багатогранника.

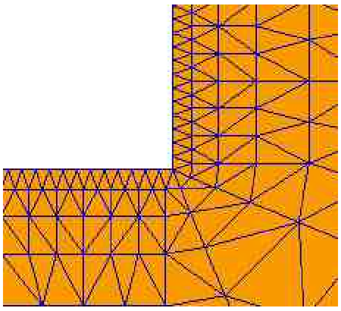


Рис. 3 – Адаптивна сітка в околі прямокутного отвору

Числовий аналіз. Розрахунки здійснено на ПК з процесором AMD Ryzen 7 5800H з тактовою частотою 3,2 GHz, оперативною пам'яттю 16 GB, відеокартою AMD Radeon Graphics, розрядність системи x64. Середня кількість скінченних елементів для циліндричної оболонки – 22228, вузлів – 46096; для конічної оболонки: 18091 та 37759, відповідно.

Обчислення виконано для оболонок з малим квадратним отвором. Згідно з [7] отвір вважався *малим*, якщо виконувалось співвідношення $0 < a\big/(2\sqrt{R_0 h}) < 1$, та *немалим*, якщо $a\big/(2\sqrt{R_0 h}) > 1$, де R_0 – радіус кривини координатної лінії оболонки (рис. 1, б)). Для циліндричної оболонки маємо $R_0 = r_2$, для конічної $R_0 = (2r_1 + \sqrt{L^2 + H^2})/(2\cos\alpha)$, $\alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{H}{L}\right)\frac{180^\circ}{\pi}$, $L = \sqrt{H^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

Розміри оболонок обирались відповідно до [3, 9]: $r_1 / h = 55{,}56$; $r_2 / h = 73{,}704$; $H / h = 148{,}67$; сторона отвору для циліндричної оболонки $a / h = 8{,}6$; для конічної оболонки $a / h = 8{,}1$, при цьому $a\big/(2\sqrt{R_0 h}) = 0{,}5$. Матеріал оболонок – сталь (модуль пружності $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}28$; границя текучості $\sigma_Т = 620{,}42$ МПа; границя міцності $\sigma_в = 723{,}8$ МПа). Осьові рівномірно розподілені розтягувальні зусилля інтенсивності $\tilde{P}_2 = 10$, $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 r_2 / r_1$ ($P_k / h = \tilde{P}_k$ МПа, $k = 1, 2$).

Матеріал стрічкового включення навколо отвору та його ширина варіювалися ($E_{вкл} = 2E_0/3;\ E_0/2;\ 2E_0/5;\ E_0/3$ та $h_{вкл} = 0{,}25a;\ 0{,}125a;\ 0{,}0625a$). Зокрема, при $E_{вкл} = E_0 / 3$ в якості матеріала включення використовували матеріал, схожий за властивостями з алюмінієм ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0{,}36$, $\sigma_Т = 90$ МПа, $\sigma_в = 190$ МПа). Вибір матеріалів включень носить умовний характер.

Циліндричні оболонки. Результати проведених обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для циліндричної оболонки з малими квадратними отворами у разі $a\big/(2\sqrt{R_0 h}) = 0{,}5$ та стрічковим включенням ширини $h_{вкл} = 0{,}25a$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці
з квадратним отвором в залежності від величини
модуля пружності включення при $h_{вкл} = 0{,}25a$

$E_{вкл}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	4,32	-18,3
$E_0 / 2$	3,52	-33,5
$2E_0 / 5$	2,99	-43,5
$E_0 / 3$	2,61	-49,1

Тут δ – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення (ККН=5,29 [7]).

Із табл. 1 випливає, що наявність стрічкового включення з більш «м'якого» матеріалу, ніж матеріал оболонки, дає змогу зменшити величину ККН навколо квадратного отвору на ~ (18 – 49) %. Тут найкращім із розглянутих варіантів при $h_{âêë} = 0,25à$ з точки зору зменшення ККН виявляється включення з модулем пружності, що в три рази менше ніж E_0 ($E_{âêë} = E_0 / 3$). При цьому ККН=2,61 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 49 %. Концентрація напружень спостерігається навколо кутів отвору.

У разі оболонки з відповідним круговим отвором ($r_0 = a/2$) і $h_{âêë} = 0,25à$ величину ККН вдається зменшити на ~ (22 – 35) %. При цьому найкращім із розглянутих варіантів виявляється включення з модулем пружності $E_{âêë} = E_0 / 2$. У даному випадку ККН=2,13, величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 35 %. Концентрація напружень має місце не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів [3].

На рис. 4, а) – рис. 4, г) наведено приклад розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого квадратного отвору $(a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5)$ у разі «м’якого» включення ширини $h_{âêë} = 0,25à$ при величині модуля пружності $E_{âêë} = 2E_0 / 3$ (рис. 4, а), б)) та при $E_{âêë} = E_0 / 3$ (рис. 4, в), г)). При фіксованій ширині включення спостерігається перерозподіл напружень в залежності від його модуля пружності.

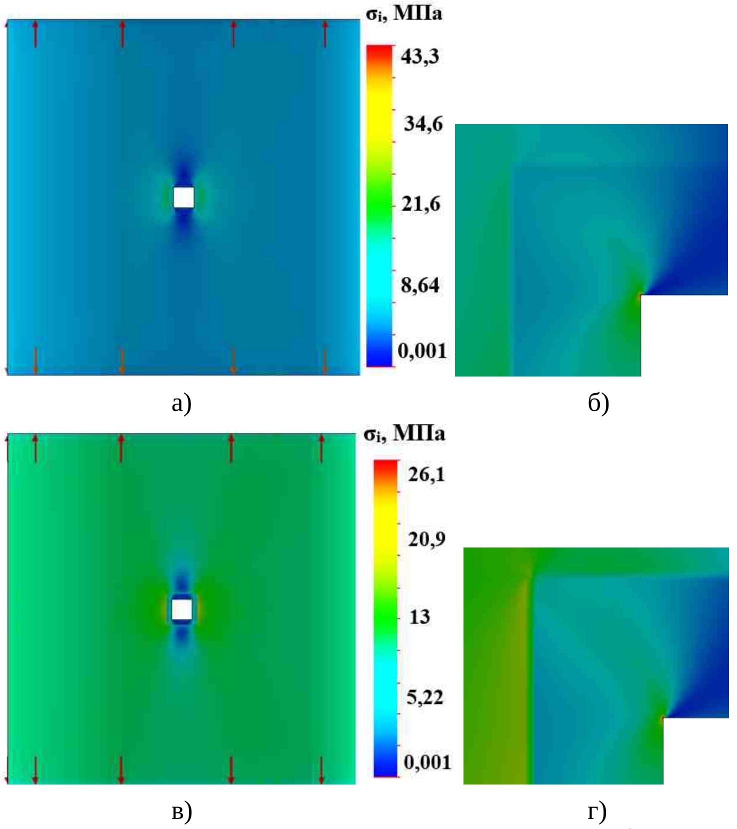


Рис. 4 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м’якого» включення ширини $h_{âêë} = 0,25à$ при $E_{âêë} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{âêë} = E_0 / 3$ (в), (г)

Аналіз рис. 4 показує, що у випадку $E_{\text{âêë}} = 2E_0 / 3$ концентрація напружень спостерігається біля кутових точок отвору (ККН=4,32), при зменшенні модуля пружності в два рази $(E_{\text{âêë}} = E_0 / 3)$ спостерігається перерозподіл напружень у напрямку з'єднання матеріалів включення і оболонки (на стик оболонки з включенням), при цьому ККН=2,61. Вказаний ефект є менш вираженим у порівнянні з відповідною оболонкою з малим круговим отвором [3].

Розподіл інтенсивності напружень у циліндричній оболонці по розгортці контура квадратного отвору і вздовж стику матеріалів оболонки і включення проілюстровано на рис. 5 для включення ширини $h_{\text{âêë}} = 0,25\text{à}$ і різних варіантів величини його модуля пружності $(E_{\text{âêë}} = 2E_0 / 3;\ E_0 / 2;\ 2E_0 / 5;\ E_0 / 3)$. По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань $0 \le l \le 1$ по розгортці контурів отвору (суцільні лінії) і стрічкового включення (пунктирні лінії). Спостерігається механічний ефект: чим «м'якше» матеріал включення, тим менша величина ККН. На межі з'єднання матеріалів оболонки і включення має місце незначне зростання напружень, але стрибків напружень не відбувається.

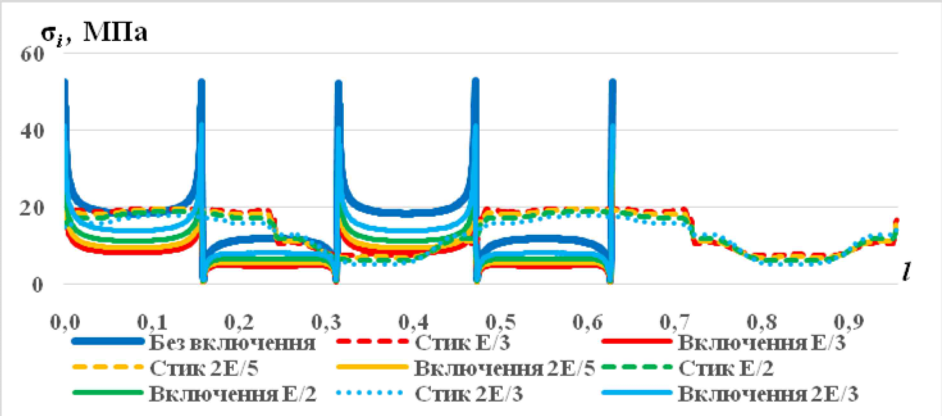


Рис. 5 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки з включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{âêë}} = 0,25\text{à}$ для різних варіантів $E_{\text{âêë}}$

У табл. 2 та табл. 3 наведено результати числового розрахунку ККН для циліндричної оболонки з малими квадратними отворами $(a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5)$ та тонкими стрічковими включеннями ширини $h_{\text{âêë}} = 0,125a$ та $h_{\text{âêë}} = 0,0625a$ в залежності від зміни величини модуля пружності відповідно.

Таблиця 2

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{\text{âêë}} = 0,125a$

$E_{\text{âêë}}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	4,25	-19,7
$E_0 / 2$	3,44	-34,9
$2E_0 / 5$	2,90	-45,2
$E_0 / 3$	2,52	-52,4

Аналогічно попередньому випадку тут також спостерігається тенденція зменшення ККН при зменшенні величини модуля пружності. У порівнянні з випадком оболонки без включень за рахунок використання «м’яких» включень навколо отворів вдається зменшити ККН на ~ (20 – 52) %. При ширині включення $h_{âêë} = 0{,}125a$ найкращім з точки зору зменшення ККН із розглянутих варіантів механічних властивостей включення тут також виявляється випадок включення $E_{âêë} = E_0 / 3$, при цьому ККН=2,52 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 52 %.

У випадку оболонки з відповідним круговим отвором ($r_0 = a/2$) і $h_{âêë} = 0{,}125\grave{a}$ величину ККН вдається зменшити на ~ (19 – 26) %. При цьому найкращім із розглянутих варіантів, як і у випадку більш широкого кільцевого включення ($h_{âêë} = 0{,}25a$), виявляється включення з модулем пружності, що в два рази менше ніж E_0 ($E_{âêë} = E_0 / 2$). Тут маємо ККН=2,41, величина його відхилення від відповідного значення ККН для оболонки без включення складає ~ 26 %. Концентрація напружень має місце не тільки навколо отвору, а і на стику матеріалів [3].

На рис. 6, а) – рис. 6, г) подано розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці і в околі її малого квадратного отвору $(a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0{,}5)$ у разі «м’якого» включення з модулем пружності $E_{âêë} = E_0 / 3$, ширини $h_{âêë} = 0{,}125\grave{a}$ (рис. 6, а), б)) та $h_{âêë} = 0{,}0625\grave{a}$ (рис. 6, в), г)).

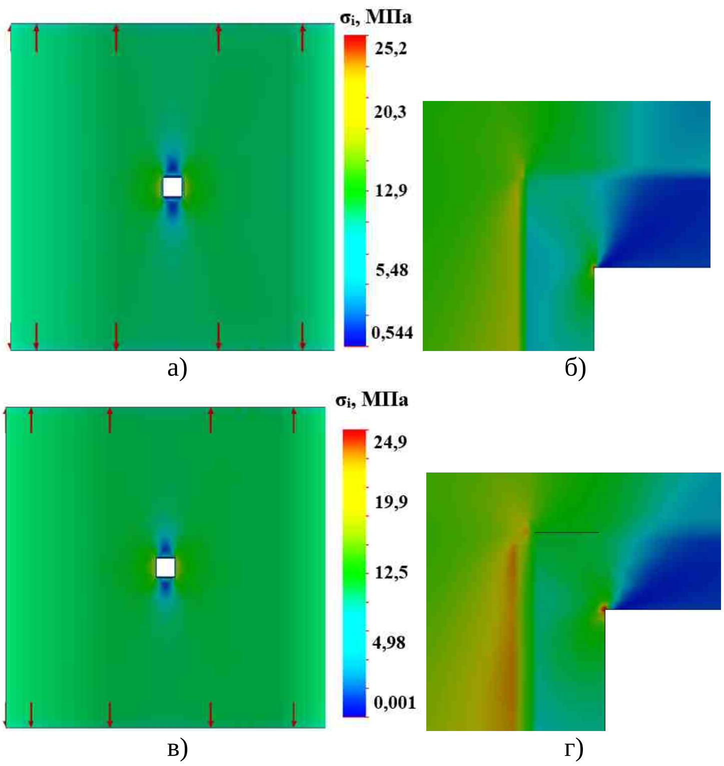


Рис. 6 – Розподіл інтенсивності напружень в циліндричній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м’якого» включення $E_{âêë} = E_0 / 3$ при $h_{âêë} = 0{,}125\grave{a}$ (а), (б) та при $h_{âêë} = 0{,}0625\grave{a}$ (в), (г)

Аналіз рис. 6 показує, що при вказаній фіксованій величині модуля пружності включення (що в 3 рази менше величини E_0 основного матеріалу оболонки) спостерігається перерозподіл напружень в напрямку межі з’єднання матеріалів оболонки і включення в залежності від його ширини: при зменшенні ширини включення від $h_{âêë} = 0{,}125a$ до $h_{âêë} = 0{,}0625a$ напруження на стику матеріалів по боках отвору зростають, але стрибків не спостерігається і концентрація напружень залишається в околі кутових точок отвору, при цьому величина ККН змінюється від 2,52 до 2,49 відповідно.

На рис. 7 та рис. 8 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень по розгортці контуру квадратного отвору і вздовж стику оболонки із включенням для різних варіантів величини його модуля пружності.

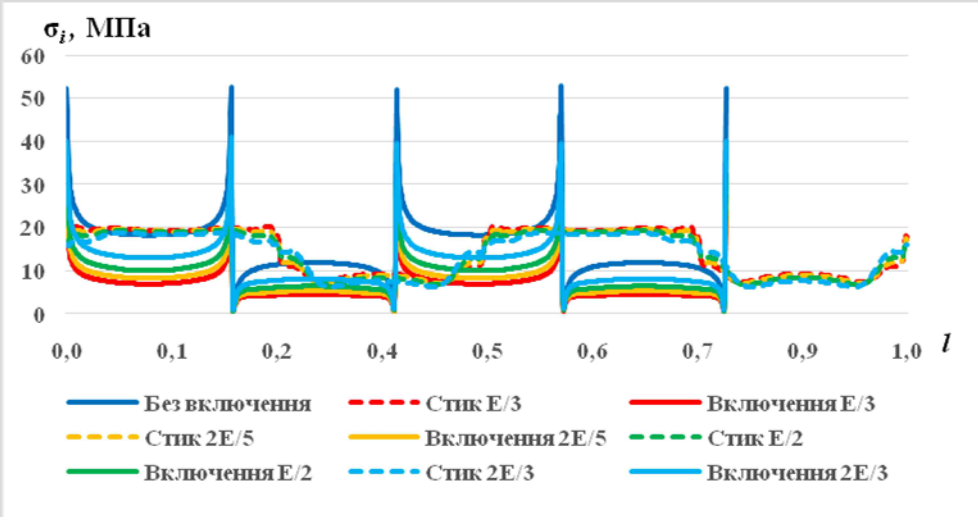


Рис. 7 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{âêë} = 0{,}125a$ для різних варіантів $E_{âêë}$

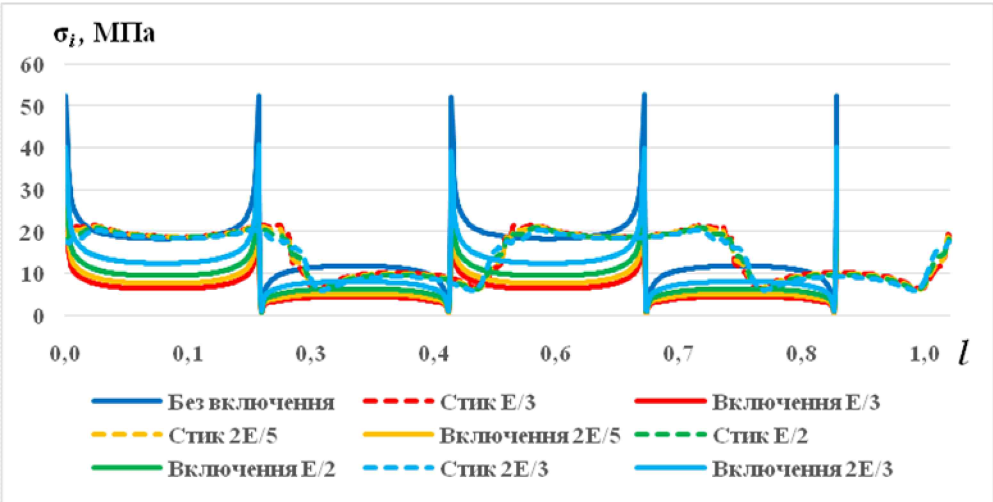


Рис. 8 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в циліндричній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{âêë} = 0{,}0625a$ для різних варіантів $E_{âêë}$

Аналіз одержаних результатів показує, що чим «м’якше» матеріал стрічкового включення навколо квадратного отвору, тим менша величина ККН. На відміну від випадку відповідного кругового отвору в циліндричній оболонці тут немає вираженого ефекту перерозподілу максимальних напружень від отвору до місця з’єднання включення з матеріалом оболонки (рис. 5, рис. 7, рис. 8). У разі кругового отвору маємо: чим тонше включення, тим більш вираженим є перерозподіл напружень і тенденція зсуву зони локації концентрації напружень та їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення [3].

Таблиця 3

Коефіцієнт концентрації напружень в циліндричній оболонці в залежності від величини модуля пружності включення при $h_{âêë} = 0,0625a$

$E_{âêë}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	4,21	-20,4
$E_0 / 2$	3,40	-35,7
$2E_0 / 5$	2,87	-45,7
$E_0 / 3$	2,49	-52,9

Тут у порівнянні з випадком оболонки без включень вдається зменшити ККН на ~ (20 – 53) % за рахунок використання навколо отворів «м’яких» тонких включень ширини $h_{âêë} = 0,0625a$. При цьому на відміну від випадку відповідної оболонки з круговим отвором має місце така закономірність у разі фіксованої ширини включення: чим «м’якше» включення, тим менше величина ККН. У разі оболонки з круговим отвором і $h_{âêë} = 0,0625a$ вдається зменшити ККН на ~ (13 – 22) %. При цьому найкращий результат показує включення з модулем пружності $E_{âêë} = 2E_0 / 3$ (ККН=2,55).

Таким чином, порівняння одержаних результатів для циліндричної оболонки з квадратними отворами для усіх розглянутих варіантів ширини включення ($h_{âêë} = 0,25a;\ 0,125a;\ 0,0625a$) та його модуля пружності ($E_{âêë} = 2E_0 / 3;\ E_0 / 2;\ 2E_0 / 5;\ E_0 / 3$) показує, що завдяки стрічковим включенням з «м’якого» матеріалу вдається зменшити величину ККН на ~ (20 – 53) %. Найкращім виявляється випадок включення з параметрами $E_{âêë} = E_0 / 3$, $h_{âêë} = 0,0625a$ (при цьому ККН=2,49 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 53 %).

У разі оболонки з відповідним круговим отвором найбільш задовільні результати одержуємо для кільцевого включення з параметрами $E_{âêë} = E_0 / 2$, $h_{âêë} = 0,25a$ (при цьому ККН=2,13 і величина відхилення ККН від відповідного значення для оболонки без включення складає ~ 34 %). За усіх інших випадків має місце зміщення зони локації концентрації напружень до стику оболонки із кільцевим включенням. Для оболонки з квадратним отвором цей ефект не спостерігається.

Отже, у разі використання тонких стрічкових включень навколо квадратного отвору на відміну від випадку відповідних кільцевих включень навколо кругового отвору не спостерігається вираженого «механічного ефекту» зміни зони локації концентрації напружень від контуру отвору до зони з’єднання оболонки із включенням для усіх розглянутих варіантів варіювання величини модуля пружності.

Конічні оболонки. Аналогічні числові дослідження здійснено для зрізаних конічних оболонок з малими квадратними отворами. Результати проведених обчислювальних експериментів у разі $(a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5)$ за наявності в оболонці стрічкового включення ширини $h_{âêë} = 0,25a;\ 0,125a;\ 0,0625a$ в залежності від зміни величини модуля пружності наведено у табл. 4 – табл. 6 відповідно.

Таблиця 4

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{âêë} = 0,25a$

$E_{âêë}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	4,36	-19,6
$E_0/2$	3,56	-34,3
$2E_0/5$	3,02	-44,3
$E_0/3$	2,63	-51,5

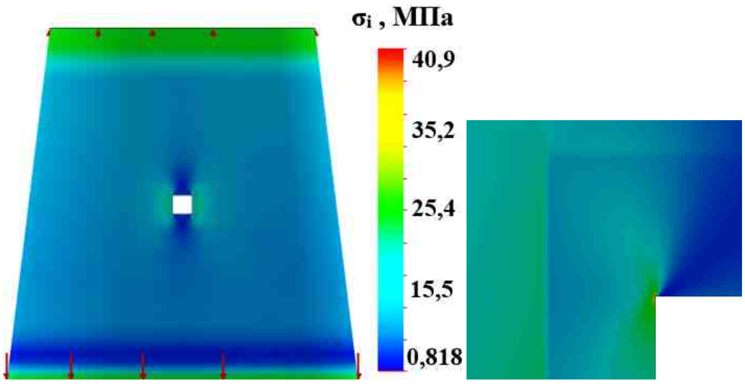
Аналіз табл. 4 показує, що за фіксованої ширини включення $h_{âêë} = 0,25a$ величина ККН значно зменшується (майже в 1,7 рази) при зменшенні величини модуля пружності від $E_{âêë} = 2E_0/3$ до $E_{âêë} = E_0/3$ (від 4,36 до 2,63).

На рис. 9, а) – рис. 9, г) зображено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці і в околі її малого прямокутного отвору $a/(2\sqrt{R_0 h}) = 0,5$ у разі «м’якого» стрічкового включення ширини $h_{âêë} = 0,25a$ з модулем пружності $E_{âêë} = 2E_0/3$ (рис. 9, а), б)) та $E_{âêë} = E_0/3$ (рис. 9, в), г)).

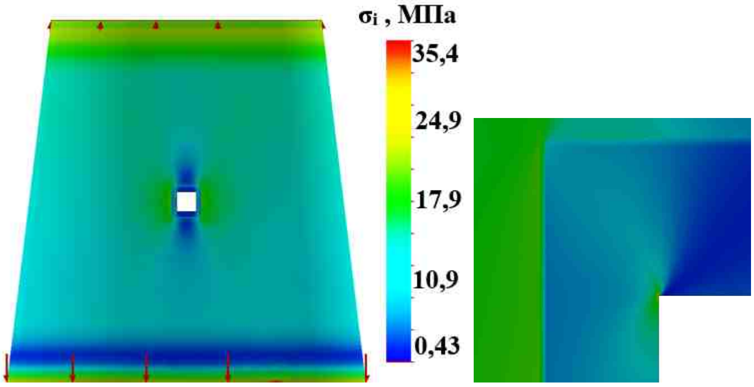
На рис. 10 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень навколо квадратного отвору і вздовж стику оболонки з включенням ширини $h_{âêë} = 0,25a$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

За характером розподілу інтенсивності напружень для даних параметрів оболонки і включення результати є аналогічними результатам для циліндричної оболонки, за винятком того, що величина напружень у верхніх кутах отвору декілька більша на ~ (2 – 3) %, ніж у нижніх в силу геометрії оболонки. Також випадок $E_{âêë} = E_0/3$ є найкращим з точки зору зменшення величини ККН (на ~ 52 %) у порівнянні з оболонкою без включень.

На рис. 11, а) – рис. 11, г) наведено розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці й в околі її малого квадратного отвору у разі «м’якого» включення з модулем пружності $E_{âêë} = 2E_0/3$, ширини $h_{âêë} = 0,125a$ (рис. 11, а), б)) та $h_{âêë} = 0,0625a$ (рис. 11, в), г)). Так саме, як і у випадку циліндричних оболонок з квадратним отвором, спостерігається концентрація напружень поблизу кутів отвору та зменшення величини ККН у порівнянні з оболонкою без включень на ~ (17 – 54) % (табл. 5, табл. 6). У разі $h_{âêë} = 0,125a$ величина ККН=4,35 (табл. 5), у разі $h_{âêë} = 0,0625a$ ККН=4,23 (табл. 6). Тут більш тонке включення призводить до кращого результату з точки зору зменшення ККН.



а) б)



в) г)

Рис. 9 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м’якого» включення $h_{\text{âêë}} = 0,25a$ при $E_{\text{âêë}} = 2E_0 / 3$ (а), (б) та при $E_{\text{âêë}} = E_0 / 3$ (в), (г)

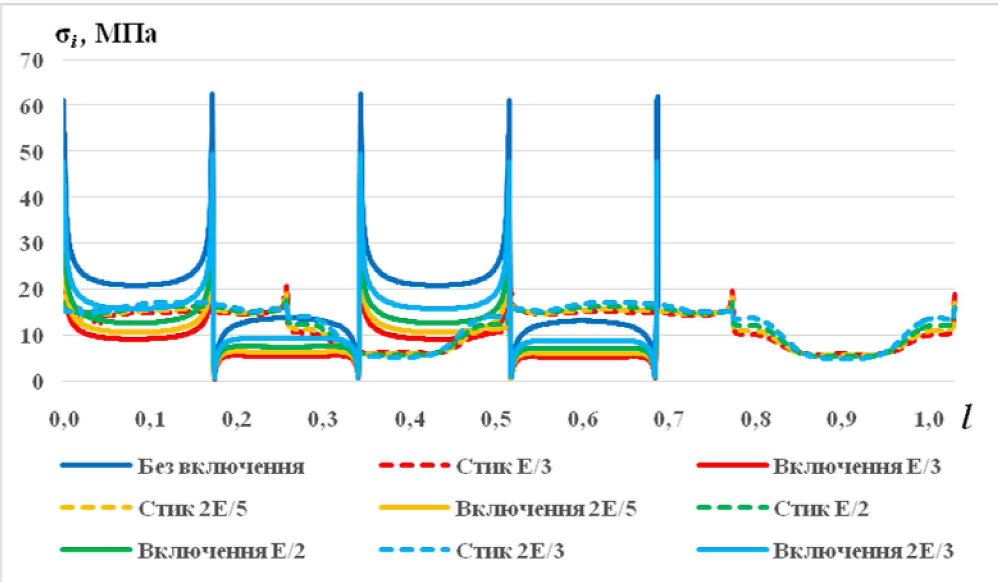


Рис. 10 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{\text{âêë}} = 0,25a$ для різних варіантів $E_{\text{âêë}}$

У випадку відповідної оболонки з круговим отвором і кільцевим включенням спостерігається перерозподіл напружень і зміна зони локації концентрації напружень та тенденція їх зростання на межі поділу матеріалів оболонки і включення при зменшенні ширини включення. Так, зокрема, при $E_{âêë} = 2E_0 / 3$ у разі $h_{âêë} = 0{,}125a$ величина ККН= 2,45 (концентрація напружень навколо отвору), у разі $h_{âêë} = 0{,}0625a$ величина ККН=2,54 (концентрація напружень на стику оболонки із включенням) [3].

Таблиця 5

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності при $h_{âêë} = 0{,}125a$

$E_{âêë}$	ККН	δ, %
$2E_0 / 3$	4,35	-17,0
$E_0 / 2$	3,52	-35,1
$2E_0 / 5$	2,97	-45,2
$E_0 / 3$	2,59	-52,2

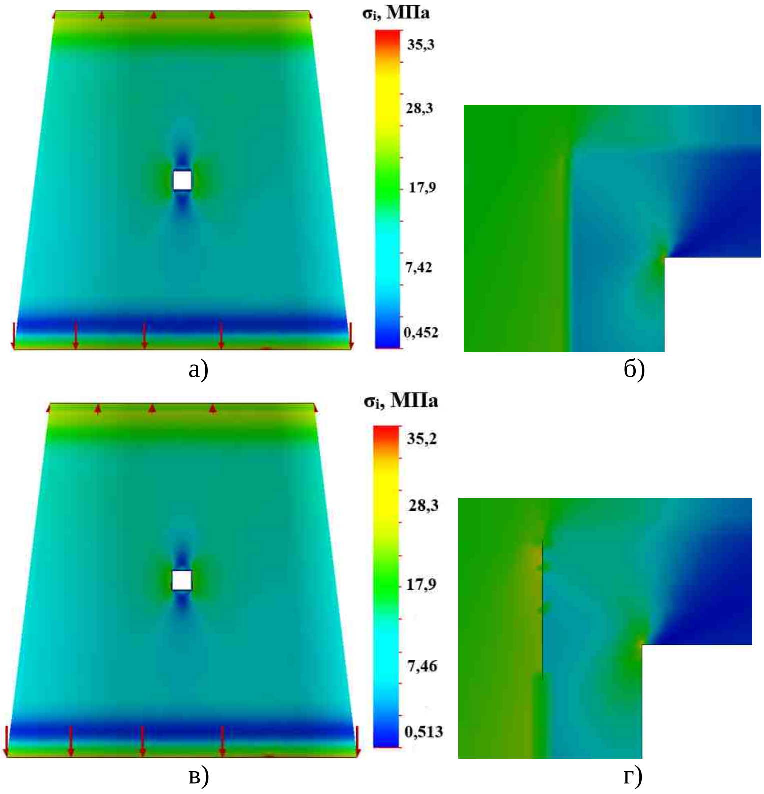


Рис. 11 – Розподіл інтенсивності напружень в конічній оболонці (а), (в) і в околі квадратного отвору (б), (г) у разі «м’якого» включення $E_{âêë} = E_0 / 3$ при $h_{âêë} = 0{,}125a$ (а), (б) та при $h_{âêë} = 0{,}0625a$ (в), (г)

На рис. 12 та рис. 13 подано відповідні графіки розподілу інтенсивності напружень по розгортці контуру квадратного отвору і вздовж стику оболонки з включенням ширини $h_{âêë} = 0{,}125a$ та $h_{âêë} = 0{,}0625a$ для різних варіантів величини його модуля пружності.

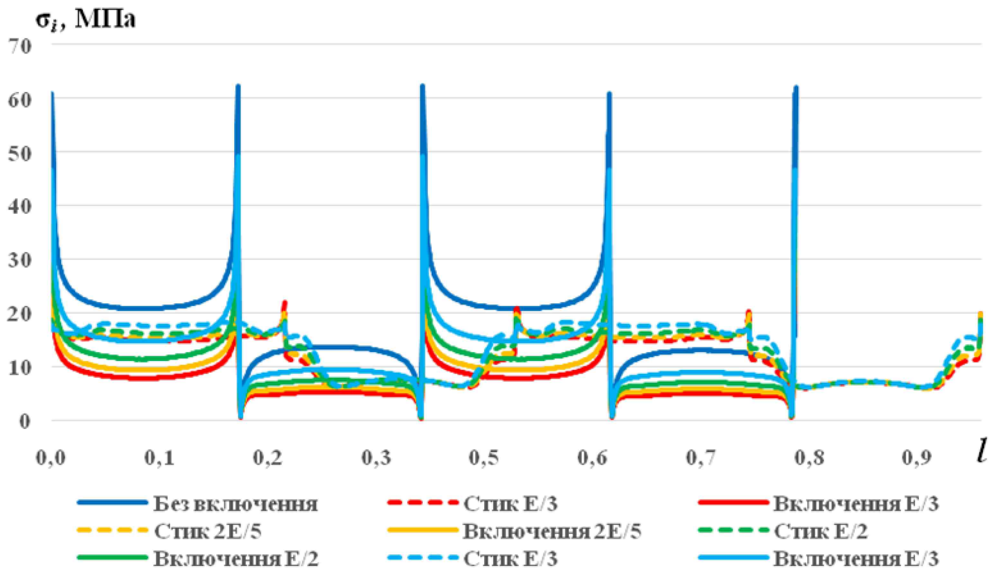


Рис. 12 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{âêë} = 0{,}125a$ для різних варіантів $E_{âêë}$

У даному випадку вдається досягнути зменшення ККН на ~ (22 – 54) % (табл. 6), зона концентрації напружень при цьому спостерігається поблизу верхніх кутів отвору. На відміну від відповідної оболонки з круговим отвором [3], в якій зона концентрації напружень зміщується від контуру отвору на стик між оболонкою і включенням у разі $E_{âêë} = E_0/2;\ 2E_0/5;\ E_0/3$, тут зміни зони локації концентрації напружень не відбувається.

Таблиця 6

Коефіцієнт концентрації напружень в конічній оболонці в залежності від величини модуля пружності та ширини включення $h_{âêë} = 0{,}0625a$

$E_{âêë}$	ККН	δ, %
$2E_0/3$	4,23	-21,9
$E_0/2$	3,42	-36,9
$2E_0/5$	2,89	-47,6
$E_0/3$	2,51	-53,7

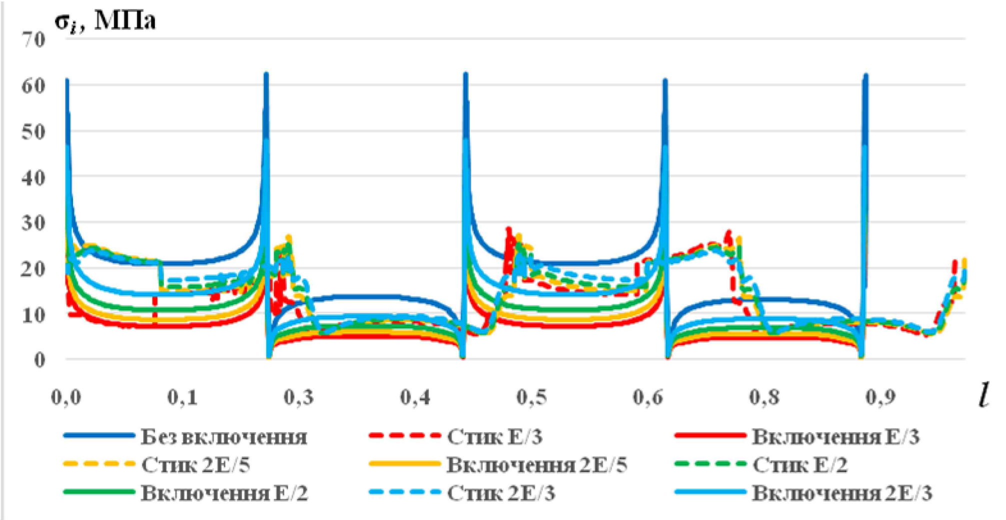


Рис. 13 – Графіки розподілу інтенсивності напружень в конічній оболонці по розгортці контуру квадратного отвору (суцільні лінії) і вздовж стику оболонки із включенням (пунктирні лінії) при $h_{âêë} = 0,0625a$ для різних варіантів $E_{âêë}$

У табл. 7 наведено результати порівняльного аналізу числового розрахунку ККН для циліндричних і конічних оболонок з малими квадратними отворами та стрічковими включеннями різної ширини $h_{âêë} = a/4,\ a/8,\ a/16$ в залежності від зміни величини модуля пружності.

Таблиця 7

Порівняльна таблиця ККН для циліндричних і конічних оболонок в залежності від величини модуля пружності та ширини включення

Оболонка	Модуль пружності включення, $E_{âêë}$	ККН		
		Ширина включення, $a/4$	Ширина включення, $a/8$	Ширина включення, $a/16$
Циліндрична	$2E_0/3$	4,32	4,25	4,21
	$E_0/2$	3,52	3,44	3,40
	$2E_0/5$	2,99	2,9	2,87
	$E_0/3$	2,61	2,52	**2,49**
Конічна	$2E_0/3$	4,36	4,35	4,23
	$E_0/2$	3,56	3,52	3,42
	$2E_0/5$	3,02	2,97	2,89
	$E_0/3$	2,63	2,59	**2,51**

Аналіз даних табл. 7 показує, що для обох типів оболонок найкращій результат з точки зору зменшення величини ККН одержано за таких параметрів включення: $E_{âêë} = E_0/3$ та $h_{âêë} = a/16$. При цьому зменшення величини ККН у порівнянні з ККН для відповідної оболонки без включення складає на ~ 54 %. Зона концентрації напружень знаходиться в околі кутових точок отвору.

У разі відповідних оболонок з круговим отвором найкращій результат дають такі параметри включення: $E_{âêë} = E_0 / 2$ та $h_{âêë} = a / 4$. При цьому величину ККН вдається зменшити для обох типів оболонок на ~ 35 %, зона концентрації напружень залишається в околі отвору з певним перерозподілом в бік межі між оболонкою і включенням [3].

Аналіз одержаних результатів для обох типів оболонок з квадратними отворами показує, що чим «м’якше» матеріал включення і чим менше його ширина, тим меншою є величина ККН.

При розрахунках НДС і визначенні ККН для конічних оболонок з отворами виявляється, що проблема зниження концентрації напружень навколо отвору не є єдиною проблемою для таких оболонок. Завдяки їх геометрії виникає так званий ефект «конічності», який потребує окремого врахування для визначення критичних напружень на торцях. Використання навколо отворів включень з відповідними механічними і геометричними параметрами дає змогу зменшити напруження в зоні локальних концентраторів. Зони поблизу торців, де спостерігається ефект «конічності», потребують окремої уваги та проведення додаткових досліджень. Щоб уникнути або пом’якшити цей ефект, можна розглянути, наприклад, такі підходи:

– оптимізація геометрії оболонки: модифікація форми оболонки, зменшення кута нахилу конусу та ін.;
– оптимізація розмірів та розташування отворів: врахування специфіки розмірів, форми та розташування отворів;
– використання додаткових підкріплень або матеріалів: застосування додаткових елементів конструкції або використання матеріалів з покращеними механічними властивостями у зоні «конічності»;
– вдосконалення методів аналізу: покращення числових методів аналізу для більш точного моделювання поведінки конічних оболонок, враховуючи їхні геометричні особливості та зменшуючи вплив ефекту «конічності» на розподіл напружень.

Висновки. У результаті числового дослідження, проведеного за допомогою МСЕ стосовно впливу механічних і геометричних параметрів стрічкових включень на ККН в тонких циліндричних і конічних оболонках з малими квадратними отворами, одержано певні сполучення раціональних параметрів включень, що дають змогу зменшити величину ККН на ~ 54 %. На відміну від відповідних оболонок з круговими отворами, де в залежності від величини механічних і геометричних параметрів має місце механічний ефект, пов’язаний зі зміною локації зони концентрації напружень і перерозподілом максимальних напружень від контуру отвору у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення, у разі наявності квадратних отворів, цей ефект є менш вираженим. Концентрація напружень зберігається в околі кутових точок отвору, перерозподіл напружень в зоні концентрації у напрямку межі поділу матеріалів оболонки і включення є незначним.

Перспективним є пошук шляхів урахування або усунення ефекту «конічності» для оболонок, а також знаходження раціональних параметрів включень, що дадуть змогу зменшити локальну концентрацію напружень для різних конфігурацій отворів в оболонкових конструкціях сучасної техніки, зокрема ракетно-космічної.

1. *Авдонин А. С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М., 1969. 402 с.
2. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецевидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2021. Вип. 33. С. 43–54.
3. *Гарт Е. Л., Семенча О. О.* Комп'ютерне моделювання впливу стрічкових включень на концентрацію напружень в тонких циліндричних та конічних оболонках з круговими отворами. Технічна механіка. 2023. №4. С. 60–75. https://doi.org/10.15407/itm2023.04.060
4. *Григоренко Я. М., Мольченко Л. В.* Теорія пластин та оболонок. К., 1993. 232 с.
5. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей К.: Академпериодика, 2006. 472 с.
6. *Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М.* Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів. Львів: Простір-М, 2017. 492 с.
7. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С. и др.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К. Наукова думка, 1980. 636 с.
8. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
9. *Сторожук Є. А., Максимюк В. А., Чернишенко І. С.* Концентрація напружень в області прямокутного отвору на бічній поверхні нелінійно-пружної ортотропної конічної оболонки. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 11. С. 41–48. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.041
10. *Чернобрывко М. В., Аврамов К. В., Батутина Т. В. и др.* Динамическая неустойчивость подкрепленных конических обтекателей ракет-носителей в сверхзвуковом газовом потоке. Технічна механіка. 2015. №1. С. 15–29.
11. *Darvizeh M., Haftchenari H., Darvize A., Ansari R., Sharma C. B.* The effect of boundary conditions on the dynamic stability of orthotropic cylinders using a modified exact analysis. Composite Structures. 2006. V. 74. P. 495–502. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.05.004
12. *Han X., Xu D., Liu G. R.* Transient responses in a functionally graded cylindrical shell to a point load. Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 251, Iss. 5. P. 783–805. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3997
13. *Hua L., Lam K. Y.* Orthotropic influence on frequency characteristics of a rotating composite laminated conical shell by the generalized differential quadrature method. Int. J. of Solids and Structures. 2001. V. 38. P. 3995–4015. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00272-9
14. *Hudramovich V. S, Hart E. L, Marchenko O. A.* Reinforcing Inclusion Effect on the Stress Concentration within the Spherical Shell Having an Elliptical Opening Under Uniform Internal Pressure. Strength of Materials. 2020. V. 52, No. 6. P. 832–842. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7
15. *Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

Отримано 12.02.2024,
в остаточному варіанті 13.03.2024