УДК 51-72:519.245:533.6.011.5 https://doi.org/10.15407/itm2022.02.071

Т. Г. СМІЛА, Л. Л. ПЕЧЕРИЦЯ

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ГАЗОДИНАМІЧНИХ РОЗРАХУНКІВ В ЗАДАЧАХ ОБТІКАННЯ ПЕРЕШКОД РОЗРІДЖЕНИМ СТРУМИННИМ ПОТОКОМ

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України і Державного космічного агентства України,
вул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: smelaya.t.g@nas.gov.ua, larisa.peche@gmail.com

Розробка конкурентоспроможних зразків ракетно-космічної техніки вимагає постійного вдосконалення і підвищення точності моделювання газодинамічних процесів навколо них. Це може сприяти подовженню терміну активної експлуатації космічних апаратів (КА) і, таким чином, підвищити економічну ефективність космічної діяльності. Зокрема, досить актуальним є моделювання взаємодії розріджених струминних потоків двигунних установок (ДУ) КА з його окремими елементами. Для розв'язання цієї задачі при досить високому ступеню розрідженості навколишнього середовища застосовують молекулярно-кінетичне уявлення про структуру газу, якому відповідає рівняння Больцмана. Метою статті є огляд наявних методів моделювання газодинамічних процесів навколо КА у потоці розрідженого газу з урахуванням струминних потоків ДУ і вибір найперспективніших підходів до розв'язання цієї проблеми. Серед розглянутих методів виділено декілька основних напрямків: наближені, аналітичні і числові методи. Наближені методи використовують фізичні моделі течії в струмені, апроксимацію результатів числових розрахунків, або поєднання обох підходів. Аналітичні методи ґрунтуються на суттєво спрощуючих припущеннях і призначені для розв'язання дуже вузького кола задач. Числові методи є найбільш універсальним інструментом теоретичного дослідження. Водночас, кожний такий метод також має певні рамки застосування. Найбільш поширені і найперспективніші на сьогодні – методи статистичного моделювання: метод прямого моделювання Монте-Карло (ПММК) і метод пробних частинок (МПЧ). Перший використовує принцип розщеплення безперервного процесу руху і зіткнень молекул в розрідженому газі на два послідовних незалежних етапа (вільно-молекулярний перенос і релаксацію) на кожному малому часовому кроці. Моделювання здійснюється по часовим крокам і фактично відтворює певний нестаціонарний процес. Другий метод – МПЧ – полягає в статистичному послідовному моделюванні блукань пробних частинок (ПЧ) (молекул) на тлі польових серед комірок розрахункової сітки. Рухомі у межах комірок розрахункової ділянки ПЧ періодично стикаються з обтічною перешкодою і польовими частинками, поступово змінюючи при цьому як свою швидкість, так і характеристики поля. Точність моделювання обох статистичних підходів, як і можна очікувати, обернено пропорційна квадратному кореню з числа випробувань – часових кроків і кількості моделюючих частинок для ПММК та кількості послідовно змодельованих траєкторій ПЧ для МПЧ, що суттєво впливає на можливість досягнення належного ступеня точності.

Ключові слова: *газодинамічні процеси, аналітичні і числові методи, розріджений струминний потік, методи статистичного моделювання, метод прямого моделювання Монте-Карло, метод пробних частинок.*

The development of competitive space hardware calls for continuing improvements in the accuracy of simulation of gas-dynamic processes in the space vehicle vicinity. This may contribute to extending the active life of spacecraft, thus improving the economic efficiency of space activities. In particular, quite a topical problem is the simulation of the interaction of rarefied jets from the propulsion system of a spacecraft with its individual components. To solve this problem in the case of a rather high surrounding vacuum, use is made of the molecular-kinetic concept of the gas structure based on the Boltzmann equation. The aim of this paper is to overview existing methods of simulation of gas-dynamic processes near spacecraft in a rarefied gas flow with account for propulsion system jets and to choose the most promising approaches to the solution of this problem. Among the methods considered, several main lines are set off: approximate, analytical, and numerical methods. Approximate methods use physical models of jet flow, approximation of numerical results, or a combination of both approaches. Analytical methods are based on essentially simplified assumptions and are intended for a very narrow class of problems. Numerical methods are the most universal tool of theoretical study. At the same time, each numerical method has a range of application of its own. At present, the most used and promising methods are statistical simulation methods: the direct simulation Monte Carlo method (DSMCM) and the test particle method (TPM). The former splits the continuous process of molecule motion and collisions in a rarefied gas into two successive independent stages (free-molecular transfer and relaxation) at each small time step. The simulation is done by time steps and in fact reproduces a nonstationary process. The latter, the TPM, consist in a statistical successive simulation of the wandering of test particles (molecules) on the background of field ones about the cells of the computational grid. Test particles, which move within the cells of the computational area, periodically collide with the obstacle in the flow and field particles, and in doing so they gradually change both their velocity and the field characteristics. For both statistical approaches, the simulation accuracy, as can be expected, is inversely proportional to the square root of the number of tests: the number of time steps and modeling particles for the DSMCM and the number of successively simulated test particle trajectories for the TPM. This may greatly affect the possibility of at-

taining a desired accuracy.

Keywords: *gas-dynamic processes, analytical and numerical methods, rarefied jet flow, statistical simulation methods, direct simulation Monte Carlo method, test particle method.*

При розробці сучасних і перспективних зразків ракетно-космічної техніки зберігає свою актуальність визначення газодинамічних параметрів (ГДП) навколо космічних апаратів (КА) різної геометричної форми. При цьому постійно зростає складність завдань. Зокрема, досить проблемним залишається моделювання взаємодії розріджених струминних потоків двигунних установок (ДУ), що є частиною конструкторсько-компонувальної схеми КА, з його елементами.

При умові, що ступінь розрідження газу досить велика, методи розрахунку його течії (включно зі струминними потоками), що засновані на рівняннях звичайної газової динаміки, стають непридатними. У цих умовах дискретний (молекулярний) характер газового середовища проявляється зовсім інакше, ніж у випадку більш густих газів. Фундаментом динаміки розріджених газів є молекулярно-кінетичне уявлення про структуру газу, основи якого вперше започатковано понад століття тому Максвеллом і Больцманом.

У 1872 р. Больцман запропонував рівняння, що описує статистичний розподіл частинок в газі або рідині (еволюцію в часі функції розподілу) в одночастинному фазовому просторі [1]. Воно може бути застосовано для розріджених систем, де час взаємодії між частинками малий і відповідає гіпотезі молекулярного хаосу або гіпотезі про кількість зіткнень (в якій згідно Джеймсу Максвеллу передбачається відсутність кореляцій між станами частинок, що можуть зіткнутися). Рівняння Больцмана може бути використано для розв’язання задач надзвукового обтікання перешкод, в тому числі і струминними потоками розрідженого газу.

За минулий час досягнуто значних успіхів у в обґрунтуванні і розумінні рівняння Больцмана та кінетичних рівнянь для досить складних середовищ, проте, навіть лінійні задачі для модельних рівнянь вдається розв’язати аналітично лише для найпростіших, головним чином одновимірних, течій. Але сучасний рівень розвитку авіаційно-космічної галузі вимагає ефективних методів розв’язання різноманітних складних просторових і, в загальному випадку, нестаціонарних задач при довільних числах Кнудсена. Проте треба відзначити, що, з огляду на надзвичайну складність нелінійного оператора в правій частині, а також великої кількості незалежних змінних, до теперішнього часу не доведена навіть асимптотична збіжність його розв’язка. Отримати розв’язок повного рівняння Больцмана аналітичними методами неможливо взагалі, а регулярними числовими методами вкрай важко. Поява та невпинне вдосконалення комп’ютерних технологій раз за разом дають потужні поштовхи для появи та постійного розвитку числових методів розв’язку як повних, так і модельних кінетичних рівнянь.

Оскільки розвя’зання задач розрідженої газодинаміки можуть потребувати неприйнятно великого об’єму ресурсів, на різних стадіях проєктування КА доцільно змінювати підходи, забезпечуючи таким чином мінімально необхідну ступінь точності отриманих результатів. Зокрема, на стадії ескізного проєктування для грубих оцінок розрахункових параметрів допустимі спрощені, наближені методи і моделі. Вони повинні ґрунтуватися на відомих закономірностях поведінки розрахункових параметрів, отриманих в результаті

точних розв’язків цілих класів модельних задач і наявних експериментальних даних. Пріоритет при цьому надається:

– простоті використовуваних співвідношень і алгоритмів;

– універсальності стосовно геометрії розрахункових тіл;

– контрольованості щодо точності результатів;

– мінімізації ресурсних витрат при серійних розрахунках.

Коректне виконання цих умов можливе лише при умові чіткого розуміння впливу реальних фізичних процесів на ГДП розрахункового КА.

Заключні етапи проєктування КА і процес його експлуатації вимагають більш досконалих методів, які дозволяють враховувати і виділяти вплив самих різних фізичних факторів на поведінку ГДП КА з допустимою заздалегідь заданою похибкою. У цьому сенсі найбільш універсальними та ефективними в даний час вважаються статистичні методи Монте-Карло, побудовані на моделюванні процесу на молекулярному рівні.

Засоби, що використовуються для дослідження в різних областях газової динаміки, можна розбити на три великі групи: експериментальні, аналітичні та числові.

Великою перевагою експериментів є можливість досліджувати тіла будь-якої геометричної форми. Однак, є обмеження діапазону моделювання параметрів, до того ж виготовлення натурних моделей та здійснення випробувань досить затратні. Зазвичай вони надзвичайно складні і реалізуються з залученням аеродинамічних труб. Крім того, повне моделювання в гіперзвуковому потоці на одній експериментальній установці вкрай важко здійснити через занадто велику кількість параметрів (критеріїв) моделювання. Дослідження основних параметрів подібності ГДП в перехідному режимі обтікання та узагальнення зарубіжних результатів експериментальних даних наведено в [2].

Аналітичні методи привабливі швидкістю отримання результатів і легкістю дослідження залежності ГДП від впливу різних факторів, але досі їх вдалося отримати тільки для найпростіших випадків обтікання і за умови деяких спрощень.

Числові методи є найбільш поширеними методами газової динаміки. Вони дозволяють не тільки значно підвищити ефективність моделювання реальних течій, полегшити осмислення фізичних явищ і ефектів, що реєструються в процесі натурних і фізичних експериментів, а й нерідко успішно замінити реальний експеримент числовим. Сучасне числове моделювання повинно підвищувати доступність і гнучкість використовуваних числових алгоритмів і кодів, ефективність їх застосування, забезпечувати необхідну точність результатів дослідження актуальних проблем газової динаміки. Проте, їх застосування може супроводжуватися доволі громіздкою обчислювальною процедурою. Крім того, універсального числового методу не існує і кожний з них пристосований, як правило, до обмеженого класу задач.

Аналітичні методи розрахунків газодинамічних параметрів

1 Наближені методи. Для розрахунку газодинамічних параметрів стаціонарного струминного потоку ідеального досконалого газу можна застосовувати наближені (інженерні) методи. Їх можна розділити на три групи. До першої належать методи, засновані на тих чи інших фізичних моделях течії в струмені, до другої – методи, які використовують апроксимації результатів числових розрахунків, до третьої – змішані методи. Як правило, наближені

методи дають апроксимаційні залежності на великих відстанях від зрізу сопла. Для побудови розрахункової схеми задачі витоку газу в вакуум використовується асимптотичний характер перебігу в дальньому полі струменя, що відповідає течії від точкового джерела зі швидкістю, спрямованою по радіус-вектору розрахункової точки. Густина на великій відстані від зрізу сопла відповідає наближенню:

$$\rho/\rho_a = B(M_a,\gamma) f(\theta)(r/r_a)^{-2},$$

де r_a, ρ_a, M_a – радіус зрізу сопла, густина і число Маха на зрізі сопла відповідно.

Вибір функції $f(\theta)$ здійснюється на підставі експериментальних або розрахункових даних, а значення B і невідомих коефіцієнтів функції $f(\theta)$ знаходять з умови збереження маси і кількості руху або шляхом підгонки до результатів числових розрахунків. Докладний аналіз наближених методів розрахунку ГДП наведено в [3].

2 Методи аналітичного розв'язання рівняння Больцмана. Методи аналітичного розв'язання рівняння Больцмана, як правило, мають спрощуючі припущення і призначені для розрахунку конкретних видів течії. Найвідомішими є методи Чепмена–Енскога та методи Греда, в яких оцінка невідомих параметрів розподілу ґрунтується на передбачуваних властивостях моментів функції розподілу (ФР). Ідея полягає в заміні справжніх співвідношень вибірковими аналогами. При розв'язанні системи рівнянь (вибіркових умов на моменти) отримують оцінки методу моментів.

Найчастіше в якості ФР виступають функції степеневого вигляду, математичні очікування від яких в теорії ймовірностей і математичній статистиці прийнято називати моментами, звідки і виникла назва методу. Основна проблема пов'язана з обчисленням матричних елементів, що відповідають моментам від нелінійного інтеграла зіткнень. У методі моментів оцінка невідомих параметрів розподілу ґрунтується на передбачуваних властивостях моментів.

Першим кроком до розв'язання рівняння Больцмана стала робота Гільберта [4]. Він, зокрема, започаткував вивчення структури інтеграла зіткнень і запропонував ітераційний процес, який дозволив звести розв'язок рівняння Больцмана до розв'язку нескінченної послідовності лінійних інтегральних рівнянь другого роду. Крім того, було детально розглянуто лінійний інтегральний оператор зіткнень для моделі жорстких сферичних молекул.

Дослідження властивостей лінійного інтегрального оператора продовжив Гекке [5]. Його результати згодом лягли в основу методу Чепмена–Енскога рішення лінеаризованого рівняння Больцмана [6], [7] для опису процесів при малих відхиленнях від рівноваги.

Метод Чепмена–Енскога базується на ідеї розв'язання інтегральних рівнянь Д. Гільберта [4] і його розроблено Д. Енскогом і незалежно С. Чепменом [6]. Він дозволяє отримати розв'язання кінетичного рівняння Больцмана для одночасткової ФР і є своєрідним методом послідовних наближень, в якому локальний розподіл Максвелла визначається стандартною формулою, але з локальними значеннями густини числа частинок, гідродинамічної швидкості і температури. Цей розподіл використовується в якості нульового набли-

ження, а умовою існування розв’язання для наступних наближень є виконання гідродинамічних рівнянь в попередніх наближеннях.

Метод передбачає спільний розгляд відразу шести рівнянь, розв’язок яких шукається у вигляді розкладання близько рівноважного розподілу по багаточленам Соніна в просторі швидкостей. Нульове наближення визначає рівняння гідродинаміки ідеальної рідини (Ейлера), перше наближення – рівняння Нав’є–Стокса з явними виразами для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності і двох густин, наступне наближення – рівняння Барнетта і так далі. Параметрами розкладання є, по суті, відносні зміни величин густини числа частинок, гідродинамічної швидкості і температури на інтервалі, рівному середній довжині вільного пробігу частинок, тому для задач зі стрибками значень параметрів розкладання (ударні хвилі тощо) метод застосовувати не можна.

В подальшому, після удосконалення Барнеттом [8], метод виявився дуже плідним при розрахунках коефіцієнтів переносу. Безперечним здобутком вченого стало формулювання основних положень методу. Ним вперше записано систему нелінійних моментних рівнянь, а базисними функціями обрано добутки сферичних функцій на поліноми Соніна. Це дозволило запропонувати алгоритм обчислення нелінійних матричних елементів (МЕ) від інтеграла зіткнень для степеневих потенціалів. Надзвичайна громіздкість знайдених формул дуже обмежила можливості обчислення поліномів Лежандра. Барнетт разом зі своїми послідовниками [9] рекомендували для максвеловських молекул і моделі твердих сфер обмежитися другим степенем. Для ФР Барнетт побудував друге наближення і дав вказівки, які коефіцієнти слід враховувати.

Пізніше Кумар [10] показав, що при розкладанні ФР система поліномів, запропонована Барнеттом, є найкращою. Заслугою ж Кумара стало дослідження структури нелінійного інтеграла зіткнень та ідея використовувати при розрахунку нелінійних МЕ перетворення Талмі, запозичене з квантової теорії.

Подальший розвиток метод отримав у [11]. Нерівноважна функція розподілу неявно містить характерні мікроскопічні величини: радіус зіткнення (взаємодії) і середню довжину вільного пробігу молекул, а також відповідні час зіткнення і середній час між зіткненнями. Оскільки функція розподілу змінюється (релаксує) в темпі, який відповідає характеру міжмолекулярної взаємодії і частоті зіткнень молекул, можна припустити, що залежність функції розподілу молекул від часу і координат буде носити більш складний, багатомасштабний характер. Підхід до розв’язання рівняння Больцмана визначається, виходячи з цих міркувань. Показано, що при такій стратегії алгоритм обчислення нерівноважної функції розподілу істотно модифікується, а рівняння переносу доповнюються складовими від релаксаційних процесів.

Методи Греда. Наступний розвиток і математичне обґрунтування моментний метод розв’язання рівняння Больцмана отримав в роботах Греда [7]. У методі Греда розкладання ведеться за тензорами різного рангу в декартових координатах – поліномами Греда–Ерміта. Метод Греда (в основному його 13-ти і 20-ти моментні наближення) широко використовується при вирішенні багатьох завдань кінетичної теорії газів і плазми. В залежності від числа моментів в розкладанні ФР необхідно підключати різні нелінійні МЕ інтеграла зіткнень.

Цікава особливість поліноміального розкладання, яка була помічена на початкових етапах розробки методу Чепмена–Енскога, полягає в тому, що, не дивлячись на повільну збіжність при обчисленні ФР, вирази для газових коефіцієнтів сходяться швидко. Тому, в основному, ці методи використовувалися для розрахунку коефіцієнтів перенесення, а питання про можливість обчислення ФР залишалося відкритим. Для дослідження збіжності рядів при розрахунку ФР необхідне знання МЕ інтеграла зіткнень при великих значеннях індексів, що, як уже зазначалося, становило до останнього часу серйозну проблему.

Обчислення нелінійних матричних елементів виявляється досить складним завданням навіть у випадку ізотропного за швидкостями рівняння Больцмана, коли розкладання ФР ведеться за поліномами Соніна. Вперше серйозного успіху в цьому напрямку вдалося добитися авторам роботи [12]. Вони розрахували матричні елементи для ізотропного рівняння Больцмана в разі степеневих потенціалів в припущенні незалежності перерізу розсіяння від кутів. Запропоновані аналітичні формули для матричних елементів містять 6 вкладених сум. І хоча через громіздкість розрахунків вдалося провести обчислення тільки до 13 члена в розкладанні ФР, вдалося продемонструвати, що ріст числа елементів істотно просуває опис ФР в зону великих швидкостей. Це поставило на порядок денний завдання розрахунку нелінійних матричних елементів при великих значеннях індексів.

Наступний крок у розвитку цього напрямку було зроблено в 1994 році [13], коли вдалося побудувати значно простіші аналітичні формули для матричних елементів в разі довільних степеневих потенціалів, в тому числі і для кулонівської взаємодії частинок.

3 Числові методи розрахунків газодинамічних параметрів. Числові методи є найбільш універсальним інструментом теоретичного дослідження. Разом з тим, не слід перебільшувати їх можливості, бо застосування таких методів може супроводжуватися досить громіздкою обчислювальною процедурою. Крім того, універсального числового методу не існує і кожний з них пристосований, як правило, до розв’язання конкретних задач. Приклади числових розрахунків струминних течій для задач з різною геометрією областей та режимів розрідження достатньо повно наведені в літературі. Декілька з останніх публікацій для задачі в стаціонарній постановці наведено в [14] – [17], а для нестаціонарної задачі витоку газу з мікроканалів в вакуум – у [18] – [20].

Для скорочення обчислювальних витрат можливе застосування гібридного методу, заснованого на синтезі модельного рівняння і рівняння Больцмана [21], що дозволяє зменшити розрахункову ділянку повного інтеграла зіткнень.

Метод дискретних швидкостей. Серед числових методів особливу увагу привертають універсальні підходи, які застосовуються до всіх режимів течії [22]. До них можна зарахувати моделювання течій газу на основі рівняння Больцмана або модельних кінетичних рівнянь. Огляд робіт, присвячених цим методам, наведено в [23] – [25].

До таких методів можна віднести і метод дискретних швидкостей [26]. Сутність його полягає в побудові дискретного аналога вихідного рівняння в просторі швидкостей. Обчислення інтеграла зіткнень у вузлах обраної сітки

замінюється обчисленням відповідним чином обраної квадратурної формули [24]. Існують модифікації методу дискретних швидкостей, наприклад [27], [28] (аналітичний метод дискретних швидкостей), який є дискретним аналогом методу Кейза [29].

На основі аналітичного методу дискретних швидкостей з використанням Бхатнагар–Гросс–Крук моделі рівняння Больцмана для опису еволюції газу В. Н. Поповим і Е. А. Латухіною [30] побудовано алгоритм для знаходження макропараметрів газу. Взаємодія молекул газу зі стінками каналу здійснюється згідно дзеркально-дифузної моделі Максвелла.

В рамках *консервативного методу розщеплення* будуються числові алгоритми, пристосовані для розв'язання задач газової динаміки при різних числах Кнудсена. Для апроксимації рівняння Больцмана реалізується неявна схема, що дозволяє отримати стаціонарний стійкий розв'язок. Особливу увагу приділено нестійким розв'язкам при малих числах Кнудсена.

З обчислювальної точки зору, задача зводиться до побудови числових схем для реалізації кінетичного опису при різній розрідженості. Слід зазначити, що нестійкі розв'язки рівняння Больцмана шукаються для тих режимів, де є надійні достовірні дані про турбулентні течії для надзвукових струменів [31]. Згідно з [32], порівняння з експериментами показали непоганий збіг отриманих результатів з достовірними даними.

Метод симетричного розщеплення є методом другого порядку точності за часом і по просторовим змінним і пропонується для розв'язання кінетичного рівняння Больцмана в разі дво- і тривимірних течій газу [33]. В основі методу лежить ідея симетричного розщеплення руху газу на етапи релаксації газу і вільномолекулярного руху, що забезпечує апроксимацію рівняння Больцмана з другим порядком точності за часом. Етап вільномолекулярного руху газу розраховується консервативним методом із застосуванням корекції потоків.

Кінцево-різницева схема апроксимує вільномолекулярний оператор перенесення з другим порядком точності за часом і простором, на відміну від традиційного способу розщеплення, який забезпечує тільки перший порядок точності.

Польові методи теорії багатьох частинок включають різні методи сучасної мікроскопічної теорії систем багатьох частинок і запозичені з релятивістської теорії квантового поля [34]. Під системою частинок мається на увазі сукупність порівняно великого числа частинок. Отримавши розвиток в останні роки, вони широко застосовуються в самих різних розділах фізики.

Основною метою теорії систем багатьох частинок є всебічний опис внутрішніх властивостей систем і результатів їх взаємодії із зовнішнім середовищем. Основний інтерес представляють: енергетичний спектр системи частинок (енергія основного стану, спектр порушених станів), середні значення її динамічних змінних і їх розподілу, ймовірності переходів тощо, включаючи всілякі термодинамічні і кінетичні характеристики системи.

Модель системи (характеристики окремих частинок, закон їх взаємодії) і її зовнішні умови задаються в якості вихідних умов. Важливою особливістю завдань в теорії багатьох частинок є принципова необхідність врахування взаємодії між частинками. Саме взаємодія між частинками породжує якісне різноманіття об'єктів, властиве різним розділам фізики. У той же час, точне

моделювання взаємодії між частинками більш-менш складної системи є неймовірно важким завданням.

Метод частинок в комірках (Particle-in-Cell, PiC) розроблений Харлоу [35] і дозволяє чисельно вирішувати деякі види диференціальних рівнянь в часткових похідних. Математичне обґрунтування методу було зроблено пізніше [36]. Він і досі не втратив свою актуальність: широко застосовується для моделювання процесів газової динаміки і гідродинаміки, а також при моделюванні плазми [37], [38]. Методи частинок в комірках є основою для числових алгоритмів при вирішенні актуальних задач газової динаміки, фізики плазми, динаміки розрідженого газу. Універсальний підхід до їх побудови засновано на розщепленні вихідних рівнянь з виділенням еволюційної задачі з дивергентним оператором.

Детермінований метод частинок в комірках [39] зберігає основні переваги методів частинок і при цьому не містить імовірнісних алгоритмів. Розробка методу заснована на зображенні нелінійного рівняння Больцмана для зіткнень в дивергентній формі.

Запропонований метод помітно відрізняється і від традиційних детермінованих методів, і від методу прямого статистичного моделювання. Відмінності полягають у тому, що ейлерова сітка будується не тільки у фізичному, а й у швидкісному просторах. Таким чином, при розв’язання задач динаміки розрідженого газу фактично розглядаються комірки фазового простору. Для отримання величини силового поля у вузлах розрахункової сітки застосовується процедура інтерполяції.

У методі великих частинок розрахункова зона ділиться в процесі розв’язання на окремі комірки з фіксованими границями, які і є так званими «великими частинками». Метод великих частинок є розвитком методу частинок в комірках Харлоу. Його добре освітлено в літературі і він широко використовується для дослідження ГД течій [40], [41] та інших складних фізичних явищ. Він ґрунтується на послідовному використанні ейлерового і лагранжевого підходів за допомогою апроксимацій в нерухомих вузлах розрахункової сітки і подальшого розгляду взаємодії розрахункових комірок в якості незалежних великих частинок. Потім уточнюються параметри газу в кожній з комірок на основі застосування законів збереження. Метод базується на принципі встановлення: розрахунки здійснюються на кожному часовому проміжку доти, доки процес не встановиться за часом.

Структурно-елементний метод [42] можна успішно застосовувати для неізобаричних газових струминних процесів. Незаперечною перевагою методу є: висока швидкодія програм і забезпечення допустимої похибки одержуваних результатів (близько (10 – 15) %). Це особливо актуально для складних ГД задач (наприклад, автоколивальні режими взаємодії вісесиметричних надзвукових струменів з циліндро-конічними порожнинами). Але, застосування методу передбачає добре знання структури досліджуваних газодинамічних течій. Він призначений для вирішення конкретних інженерних задач (витікання струменів, взаємодія струменів з перешкодами різної форми, тощо).

Метод використовує попередню типізацію течій на основі виявлення їх загальних властивостей з побудовою для кожного типу відповідних моделей течії і узагальненої схеми. Встановлюється перелік незалежно варійованих

параметрів і визначається зона їх можливих значень. В результаті формулюється задача розрахунку модельної течії з отриманням гарантовано надійних результатів в установленому діапазоні варіювання вихідних даних. Достовірність отриманих результатів забезпечується обов'язковою перевіркою їх адекватності за критерієм Фішера.

В процесі реалізації сруктурно-елементного методу було розроблено комплекс базових теоретичних моделей типових процесів на сіткових лініях і всередині макрокомірок. Базові теоретичні моделі являють собою різновиди диференціальних і інтегральних рівнянь законів збереження, які розв'язуються або аналітично, або за допомогою методу апроксимуючих функцій в варіанті точкових наближень. Рівняння мають різну ступінь точності. Для отримання розв'язків з необхідною точністю використовуються швидкі ітераційні процедури переходу від простих розв'язків рівнянь малої точності до складних розв'язків рівнянь, адекватних реальному процесу. Базові моделі розробляються за допомогою фізичних уявлень і гіпотез про механізми процесу.

Фундаментальною теоретичною основою для таких розробок здебільше є метод хвиль [43], статистична модель турбулентності [44], а також метод векторних ліній [45].

Метод хвиль [43] дає можливість визначити параметри потоку уздовж осі струменя лише за значеннями параметрів потоку на кромці сопла без обчислень параметрів в інших точках поля течії. Така можливість ґрунтується на збереженні інтенсивності ізоентропічних хвиль при перетині одна одною, інакше кажучи, зберігається початкова інтенсивність кожної окремої хвилі.

Молекулярно-кінетичний підхід. Завдання прогнозування параметрів власної зовнішньої атмосфери, сформованої в разі дії струменів ДУ, що розташовані на борту КА, може бути вирішено в рамках регулярних методів. Молекулярно-кінетичний підхід вперше було запропоновано в [46]. В ньому межа вільномолекулярного витікання струменя задається у вигляді деякої просторової поверхні. На граничній поверхні ГДП поля можуть бути визначені експериментально або за допомогою одного з доступних розрахункових методів (інженерних, статистичного моделювання та інших), а в дальньому полі струменя параметри визначаються на базі кінетичного підходу шляхом інтегрування моментів функції розподілу частинок у просторі швидкостей. Аналоги кінетичного підходу викладені в роботах зарубіжних авторів [47] – [49].

Свій подальший розвиток кінетичний підхід отримав у роботах [50], [51], де було розроблено методику розв'язання тривимірних вільномолекулярних струминних течій при наявності перешкод складної форми з урахуванням взаємного затінення елементів конструкції. Для визначення впливу струменів ДУ на загальну картину перебігу в околиці КА пропонується інтегральний метод [50], [51], в якому здійснюється перехід від інтегрування в просторі швидкостей до інтегрування по початковій поверхні. Газодинамічні параметри в кожній точці розрахункової ділянки можна отримати шляхом інтегрування відповідних моментів функції розподілу частинок по сферичній початковій поверхні, радіус якої не перевищує відстані від центра сфери до диска Маха. Похибка результатів залежить від точності розрахунків параметрів на початковій поверхні. Інтегральний метод дозволяє досить швидко визначити внесок струминних потоків в формування газодинамічної обстановки навко-

ло КА ([50], [51]). При визначенні силового впливу струменя на тіло виникає необхідність в додатковому інтегруванні по ділянках поверхні перепони, параметри на яких визначаються вищевказаним чином. Наявність подвійного циклу інтегрування і необхідність залучення додаткових методів розрахунку ГДП на початковій поверхні ускладнює вирішення поставленого завдання.

Методи статистичного моделювання розв'язання рівняння Больцмана є найбільш поширеними серед числових методів розв'язання задач динаміки розрідженого газу. Умовно їх можна поділити на три групи. До першої слід віднести метод, заснований на прямому моделюванні течій розрідженого газу кінцевим набором модельних частинок, який відповідає фізичній моделі газу, що лежить в основі нелінійного рівняння Больцмана [52]. При його побудові використано принцип поділу молекулярного руху на зіткнення і вільномолекулярне перенесення. До другої групи відноситься метод пробних частинок (МПЧ), який є природним розвитком класичного методу Монте-Карло для розв'язання кінетичного рівняння і базується на спеціальному ітераційному процесі для нелінійного рівняння Больцмана [53]. Третя група методів Монте-Карло для розв'язання нелінійного рівняння Больцмана заснована на теорії розгалужених випадкових процесів з використанням дискретних ординат [54]. На сьогоднішній день найбільший розвиток отримали метод прямого моделювання Монте-Карло (ПММК) і МПЧ.

Результати розрахунків статистичних методів є реалізацією відповідної випадкової величини ξ. Повторення процедури моделювання дозволяє отримати значення n незалежних реалізацій $\xi_i = 1,2,...n$, випадкової величини, для якої існують кінцеві математичне очікування M_ξ і дисперсія D_ξ. Як відомо [55], при досить великому n при заданому рівні довіри має місце співвідношення

$$\left| M_\xi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \right| \le \gamma \frac{\sqrt{D_\xi}}{\sqrt{n}},$$

де ¥ –константа, яка визначається вибором величини рівня довіри.

Звідси випливає, що точність моделювання при заданому рівні надійності пропорційна $1/\sqrt{n}$, а розрахунковий час є пропорційним n. Ця властивість статистичних методів є їх невід'ємною і принциповою вадою, оскільки призводить до істотного збільшення трудомісткості обчислень.

Метод прямого моделювання Монте-Карло. Для опису динаміки газового потоку при $Kn > 0{,}1$ найбільш часто застосовується метод ПММК або як його ще називають – метод прямого статистичного моделювання (ПСМ) (Direct Simulation Monte Carlo, DSMC) [56]. Цей метод запропоновано Г. Бердом [57] і розвинено в роботах О. М. Білоцерківського, В. Е. Яницького, М. С. Іванова та С. В. Рогазінського [58], [59], а в [60] доведена збіжність методу ПММК до розв'язання рівняння Больцмана. І хоча ПММК безпосередньо не дискретизує рівняння Больцмана, отримані з його допомогою результати можна розглядати як його числовий розв'язок.

Реальний плин газу в ПММК моделюється на ЕОМ досить великим числом розиграшу молекул. Модельований об'єм фізичного простору розбива-

ється на комірки, лінійні розміри повинні мати порядок довжини вільного пробігу. Такими комірками можуть бути або малі об'єми з заданими межами, або просто безліч точок. В останньому випадку, молекула знаходиться в даній комірці, якщо вона найближча до точки, яка відповідає цій комірці. Розміри комірок повинні бути такими, щоб зміна параметрів течії в кожній комірці була малою.

Метод ПММК використовує принцип розщеплення безперервного процесу руху і зіткнень молекул в розрідженому газі на два послідовних незалежних етапа (вільно-молекулярний перенос і релаксацію) на кожному малому часовому кроці Δt, величина якого у межах всієї ділянки повинна задовольняти умові $\Delta t < \tau = 1/\nu$, де τ – середній час між зіткненнями частинок; ν – середня частота зіткнень частинок.

Моделювання починається з встановлення початкового стану моделюючих молекул усередині ділянки і задання граничних умов. Моделювання протікає в часі (по часовим крокам) і завжди відтворює певний нестаціонарний процес. Стаціонарне рішення, якщо воно існує, досягається при заданому початковому стані і стаціонарних граничних умовах в результаті процесу встановлення за деякий час t_u. При розв'язанні стаціонарної задачі методом установлення вибір початкового стану, взагалі кажучи, є довільним.

На першому етапі частинки переміщуються на деяку відстань, а на другому етапі на основі розиграшу зіткнень по деякому імовірнісному сценарію обчислюються швидкості частинок. Описана схема в головних рисах збігається з універсальною схемою методу [61] "частинок-в-комірках" (Particles-In-Cells, PIC), що містить лагранжевий етап – перенесення приписуваних частинкам характеристик, не змінних вздовж траєкторії руху, і ейлерів етап – розрахунок змінних характеристик частинок, що проводиться в кожній комірці ейлерової сітки. Методологічна спорідненість методу прямого статистичного моделювання з методами "частинок-в-комірках" дозволяє назвати його статистичним методом "частинок-в-комірках" для розв'язання задач динаміки розрідженого газу, з огляду на імовірнісний характер розрахунків на ейлеровому етапі.

Кінцева величина пам'яті і швидкодії комп'ютера визначають обмеження на загальне число моделюючих молекул і кількість комірок. Макроскопічні параметри газу, що визначаються параметрами моделюючих частинок в комірках на даному часовому кроці, є результатом виконаного статистичного випробування (процедури моделювання). Зважаючи на відносно невелике число моделюючих частинок в комірці, статистичні флуктуації середніх параметрів в комірках на тимчасових кроках дуже великі. Тому при розв'язанні стаціонарних задач після встановлення перебігу для зменшення статистичної похибки визначення параметрів потоку збільшують час осереднення результатів моделювання (збільшують обсяг вибірки), вибираючи при $t > t_u$ для осереднення досить великий інтервал часу. Цей інтервал складається з необхідного числа послідовних часових кроків. При цьому досягається статистична незалежність результатів [62]. Як і у всіх статистичних методах, статистична помилка розрахунків обернено пропорційна квадратному кореню числа випробувань. Тому досягнення необхідної точності моделювання вимагає осереднення по досить великому числу часових кроків. Кількість таких кро-

ків залежить від числа моделюючих частинок, параметрів задачі і цілей дослідження.

Метод пробних частинок є вдалою альтернативою числового розв'язання рівняння Больцмана, який отримав обґрунтування в рамках теорії методів Монте-Карло і реалізований у відповідних розрахункових алгоритмах для розв'язання стаціонарних задач динаміки розрідженого газу [62] – [65]. Спочатку МПЧ було розроблено для вільномолекулярного режиму течії [66], а потім поширено на перехідну зону аж до континуальної (до чисел Кнудсена аж до 0,01) [67].

У об'ємі фізичного простору виділяється розрахункова ділянка (РД), побудована таким чином, щоб вона охоплювала зріз сопла, з якого витікає струменевий потік, обтічне тіло і зони збурення ГДП в його околиці. РД розбивається на комірки – малі об'єми з заданими межами. Моделюючі частинки в МПЧ підрозділяються на польові та пробні. Метод полягає в статистичному моделюванні блукань пробних молекул (частинок) на тлі польових по комірках розрахункової сітки. Рухомі у межах комірок РД пробні частинки (ПЧ) періодично стикаються з обтічною перешкодою і польовими частинками, змінюючи при цьому як свою швидкість, так і характеристики поля.

Процес випадкових блукань ПЧ в розрахунковій ділянці течії розрідженого струминного потоку передбачає реалізацію наступних подій:

– розіграш координат старту і швидкостей старту ПЧ із зрізу сопла відповідно до початкової функції розподілу;

– зіткнення ПЧ з польовими частинками для обраного потенціалу взаємодії;

– потрапляння ПЧ на поверхню обтічного тіла і відбиття відповідно обраній функції відбиття від поверхні обтічного тіла;

– вільний проліт комірки при русі частинок в розрахунковій області;

– обрив траєкторії пробної частинки при її виході за межі розрахункової області.

МПЧ дозволяє вирішувати задачі динаміки розрідженого газу різної розмірності. Розмірність визначається симетрією функції розподілу і картини обтікання перешкоди й обумовлює вибір форми геометрії розрахункової області [68]. Розрахункові алгоритми МПЧ за визначенням ГДП навколо перепони ґрунтуються на осереднені молекулярних ознак у відповідних комірках розрахункового поля [53] за часом перебування молекул в комірках і / або кількістю проведених випробувань. Як і для будь-якого статистичного методу, точність отриманих результатів безпосередньо залежить від кількості проведених випробувань. Крім того, забезпечення необхідної якості отриманого результату можливе лише за умови відповідності розміру розрахункових чарунок локальній довжині вільного пробігу молекул. Ця умова накладає жорсткі вимоги до побудови розрахункової сітки, що укупі з гігантською кількістю випробувань обумовлює значну ресурсомісткість обчислень, яка у разі обмежених технічних можливостей (об'єма пам'яті і швидкодії) наявної ЕОМ може завадити отримати результати належної якості.

Спроби вирішення проблеми нестачі машинних ресурсів при застосуванні МПЧ для вирішення задач газової динаміки здійснювались у двох напрямках: за рахунок суттєвого скорочення загальної кількості розрахункових комірок [69] і завдяки оптимізації використання потужностей на багатопроце-

сорних ЕОМ (шляхом розпаралелювання розрахунків) [70], [71]. Більш вдалим рішенням виявилася модернізація сіткової структури.

Розв’язок рівняння Больцмана при фіксованому режимі обтікання досягається шляхом ряду послідовних ітерацій, а газодинамічні параметри по всьому полю течії послідовно уточнюються методом установлення. Протягом однієї ітерації здійснюється розиграш заздалегідь заданого числа траєкторій ПЧ (іспитів). При побудові ітераційного процесу в якості початкового поля параметрів в комірках розрахункової сітки, що використовується на першій ітерації, беруться параметри в вакуумі. Початковим полем наступних ітерацій виступають параметри в комірках, отримані на попередній. Розрахунки припиняються, якщо різниця значень аеродинамічних коефіцієнтів або макропараметрів у всьому полі течії двох послідовних ітераціях по модулю стає менше наперед заданого числа.

Проблема опису контурів твердих непроникних меж (обтічного тіла або кордонів розрахункової ділянки) підчас реалізації обох описаних статистичних методів зручно вирішувати з використанням аналітичного методу завдання наборами примітивів [72] – [74].

Висновки. Вибір оптимального методу залежить від поставленої задачі, а критерії, за якими здійснюється вибір, на різних стадіях проєктування змінюються. Задіяний підхід повинен забезпечувати відповідну ступінь точності отриманих результатів у поєднанні з мінімізацію ресурсних витрат. На стадії ескізного проєктування перевага надається простим і універсальним співвідношенням і алгоритмам, що дозволяють, з одного боку, контролювати точність результатів, а з іншого – мінімізують ресурсні витрати, що досить важливо при серійних розрахунках. Заключні ж етапи проєктування КА і процес його експлуатації вимагають використання більш досконалих методів, які дозволяють враховувати і виділяти вплив самих різних фізичних факторів на поведінку ГДП КА з допустимою заздалегідь заданою похибкою.

Для дослідження в області газової динаміки традиційно використовують експериментальні, аналітичні та числові методи. Експериментальний підхід з точки зору універсальності для геометричних умов задачі чи не найкращий з методів. Але його надзвичайна складність і витратність дуже обмежує застосування такого підходу і звужує використання фактично до точкового для окремих поєднань моделюючих параметрів.

Перевагою аналітичних методів є швидкість отримання результатів і легкість дослідження залежності ГДП від впливу різних факторів, але аналітичний розв’язок рівняння Больцмана досі вдалося отримати тільки для найпростіших випадків обтікання і за умови ряду спрощень. Через складність інтегралу зіткнень аналітичний розв’язок повного рівняння Больцмана досі так і не отриманий. Проте, аналітичні розв’язки укупі з результатами експериментів, можуть слугувати еталоном для верифікації і налаштування різноманітних числових методів. Перевагою числового підходу є значне розширення діапазону параметрів і суттєве підвищення ефективності моделювання реальних течій. Нерідко числові методи дозволяють замінити реальний експеримент числовим. Перешкодою для їх успішного застосування раніше була громіздкість обчислювальних процедур, але невпинний розвиток комп’ютерних технологій дозволяє поступово долати такі проблеми, постійно вдосконалюючи такі методи розв’язання.

Після аналізу і систематизації існуючих аналітичних та числових методів розрахунку газодинамічних параметрів навколо поверхні обтічних тіл зроблено висновок, що найбільш універсальними та ефективними в даний час вважаються статистичні методи Монте-Карло, побудовані на моделюванні процесу на молекулярному рівні. Але і вони мають свої вади. Зокрема, як це властиво всім статистичним методам, існує пряма пропорційна залежність розрахункового часу від числа випробувань, а для точності моделювання – обернено пропорційна залежність від кореня квадратного з числа випробувань. Для окремих задач це може призвести до суттєвого зростання ресурсомісткості обчислень і у разі обмежень технічних характеристик (об'єма пам'яті і швидкодії) наявної ЕОМ – навіть до неможливості отримати результати бажаного ступіня точності. Розв'язати проблему може модернізація сіткової структури задля значного скорочення загальної кількості розрахункових комірок. Це одночасно суттєво зменшить вимоги до розрахункових потужностей процесора і до об'єма оперативної пам'яті ЕОМ.

1. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М., 1956. 554 с.
2. *Гусев В. Н., Егоров И. В., Ерофеев А. И., Провоторов В. П.* Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов. Изв. Академии наук РАН. 1999. № 2. С. 129–137.
3. *Басс В. П., Пяткина Л. В., Иванов С. Г.* Анализ инженерных методов расчета параметров сверхзвуковой струи, истекающей в вакуум. Аэрогазодинамика и нестационарный тепломассообмен. Киев: Наук. думка, 1983. С. 38–43.
4. *Hilbert D.* Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichung. Leipzic und Berlin, 1912. 282 p.
5. *Hecke E.* Uber orthogonal-invariante Integralgleichungen. Mathematische Annalen. 1917. Vol. 78. P. 398–404. https://doi.org/10.1007/BF01457114
6. *Chapman S.* On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory of viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monatomic gas. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1916. V. 216. P. 279–348. https://doi.org/10.1098/rsta.1916.0006
7. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math. 1949. Vol. 2. P. 311. https://doi.org/10.1002/cpa.3160020403
8. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non– uniform gas. Proc. London Math. Soc. 1935. V. 40. P. 382–435. https://doi.org/10.1112/plms/s2-40.1.382
9. *Word C. A., Mintzer D.* Truncation procedure for the spatial a homogeneous Boltzmann equation. Phys. Fluids. 1971. V. 14, N. 3. P. 499–509. https://doi.org/10.1063/1.1693463
10. *Kumar K.* Polinomial Expansion in Kinetic Theory of Gases. Ann. Phys. 1966. V. 37. P. 113–141. https://doi.org/10.1063/1.1693463
11. *Сенкевич О. А., Семенов А. М.* Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энскога по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат. Журнал технической физики. 2003. Т. 73, Вып. 10. С. 1–5. https://doi.org/10.1134/1.1620111
12. *Эндер А. Я., Эндер И. А.* Нелинейный моментный метод для изотропного уравнения Больцмана и инвариантность интеграла столкновений. Журнал технической физики. 1999. Т. 69, вып. 6. С. 22–29. https://doi.org/10.1134/1.1620111
13. *Эндер А. Я., Эндер И. А.* Моментный метод для изотропного уравнения Больцмана. Журнал технической физики. 1994. Т. 64, вып. 10. С. 38–53.
14. *Sharipov F., Sazhin O.* Numerical simulation of rarefied gas flow through a thin orifice. J. of Fluid Mechanics. 2004. V. 518. P. 35–60. https://doi.org/10.1017/S0022112004000710
15. *Varoutis S., Valougeorgis D., Sazhin O., Sharipov F.* Rarefied gas flow through short tubes into vacuum. J. of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films. 2008. V. 26, N. 2. P. 228–238. https://doi.org/10.1116/1.2830639
16. *Aristov V. V., Shakhov E. M., Titarev V. A., Zabelok S. A.* Comparative study for rarefied gas flow into vacuum through a short circular pipe. Vacuum. 2014. V. 103. P. 5–8. https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2013.11.003
17. *Titarev V. A., Utyuzhnikov S. V., Shakhov E. M.* Rarefied gas flow through a pipe of variable square cross section into vacuum. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53, N. 8. P. 1221–1230. https://doi.org/10.1134/S0965542513060183
18. *Ларина И. Н., Рыков В. А.* Численное исследование нестационарных течений двухатомного разреженного газа в плоском микроканале. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 8. С. 1332–1344. https://doi.org/10.1134/S0965542514080065
19. *Vargas M., Naris S., Valougeorgis D., Pantazis S., Jousten K.* Time-dependent rarefied gas flow of single gases and binary gas mixtures into vacuum. Vacuum. 2014. V. 109. P. 385–396. https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2014.06.024

20. *Конопелько Н. А., Шахов Е. М.* Развитие и установление истечения разреженного газа из резервуара через плоский канал в вакуум. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 10. С. 1722–1733. https://doi.org/10.1134/S0965542517100098
21. *Фролова А. А., Титарев В. А.* Кинетические методы решения нестационарных задач со струйными течениями. Математика и математическое моделирование. 2018. № 4. С. 27–44. https://doi.org/10.24108/mathm.0418.0000142
22. Фундаментальные основы МЭМС и нанотехнологий. Доклады V Всероссийской конференции, Новосибирск, 15-18 июня 2015 г. Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно–строительный университет (Сибстрин), 2015. Т. 1, вып. 5. 276 с.
23. *Додулад О. И., Клосс Ю. Ю., Потапов А. П.* Моделирование течений разреженного газа на основе решения кинетического уравнения Больцмана консервативным проекционным методом. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 1008–1024. https://doi.org/10.1134/S0965542516060117
24. *Кудряшова Т. А., Подрыга В. О., Поляков С. В.* Моделирование течений газовых смесей в микроканалах. Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2014. № 3. С. 154–163.
25. *Подрыга В. О.* Многомасштабный подход к трёхмерному расчёту течений газов и их смесей в микроканалах технических систем. Доклады Академии наук. 2016. Т. 469, № 6. С. 656–658. https://doi.org/10.1134/S1064562416040311
26. *Nordsieck A., Hicks B. L.* Monte Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral. Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of 5-th International Symposium. New York-London: Plenum Press, 1967. P. 695–710.
27. *Barichello L. B., Siewert C. E.* A Discrete-Ordinates Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1999. V. 50. P. 972–981. https://doi.org/10.1007/s000000050189
28. *Siewert C. E.* The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2003. V. 54, is. 2. P. 273–303. https://doi.org/10.1007/s000330300005
29. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: Московский государственный областной университет, 2004. 286 с.
30. *Попов В. Н., Латухина Е. А.* Вычисление макропараметров разреженного газа в задаче о течении Куэтта методом дискретных скоростей. Вестн. Моск. Государственного Областного ун-та. Сер. 2. Физика–математика. 2018. № 4. С. 140–149. https://doi.org/10.18384/2310-7251-2018-4-140-149
31. *Novopashin S. A., Perepelkin A. L.* Turbulence in rarefied gases. 19th Rarefied Gas Dynamics Symp. Weinheim: VCH, 1991. P. 877–883.
32. *Aristov V. V.* Изучение устойчивых и неустойчивых свободных струйных течений на основе уравнения Больцмана. Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1998. № 2. С. 153–157. https://doi.org/10.1007/BF02698713
33. *Ларина И. Н., Рыков В. А.* Численное решение уравнения Больцмана методом симметричного расщепления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43, № 4. С. 601–613.
34. *Власов А. А.* Теория многих частиц. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 348 с.
35. *Харлоу Ф. Х.* Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. 460 с.
36. *Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И.* О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями. Числ. методы механ. сплошной среды. 1970. 1. С. 40–62.
37. *Григорьев Ю. Н., Вшивков В. А., Федорук М. П.* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004. 360 с.
38. *Янилкин Ю. В., Шмелев В. А., Колобянин В. Ю., Беляев С. П.* Монотонный метод частиц для моделирования двумерных газодинамический течений. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 3. С. 3–14.
39. *Малков Е. А., Иванов М. С.* Детерминированный метод частиц-в-ячейках для решения задач динамики разреженного газа. Часть I. Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, вып. 3. С. 368–374.
40. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 392 с.
41. *Кустов А. В., Сафронов А. В.* Совершенствование метода «крупных частиц». Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМаш, 1999. № 16. С. 132–137.
42. *Афанасьев Е. В., Балобан В. И., Бобышев С. В., Добросердов И. Л.* Структурно-элементный метод расчета газоструйных процессов. Матем. Моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 31–43.
43. *Липман Г., Рошко А.* Элементы газовой динамики. М.: ИЛ, 1960. 352 с.
44. *Зазимко В. А., Клочков А. В.* Метод расчета сверхзвуковых струйных течений. Межвузовский сборник: Динамика неоднородных и сжимаемых сред. Л.: Изд. ЛГУ, 1984. С. 136–147.
45. *Бобышев С. В., Добросердов И. Л.* Идентификационное моделирование процессов на неизобарическом участке струи. Моделирование в механике. Новосибирск, 1987. Т. 1(18), № 6. С. 3–13. https://doi.org/10.1177/0037550087181002
46. *Дулов В. Г., Лукьянов Г. А.* Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 223 с.
47. *Lengrand J. C., Allegre J., Raffin M.* Rocket exhaust plums issued from scarfed nozzles. 17-th Int. Simp. on Rarefied gas Dynamics. 1990. P. 947–954.
48. *Koppenwallner G.* Low density aerodynamics of satellites. 13-th Int. Symposium on Rarefied gas Dynamics. 1982. V. 1. P. 385–399.
49. *Allegre J., Raffin M., Lengrand J. C.* Experimental study of the plum impingement problem associated with rocket stage separation. J. Spacecraft. 1986. V. 23, N 4. P. 368–372. https://doi.org/10.2514/3.25814
50. *Басс В. П., Печерица Л. Л.* Расчет газодинамических параметров в поле нерасчетной струи при наличии преград различной формы. Космическая наука и техника. Киев: Наук. думка, 1992. Вып. 6. С. 8–13.

51. *Печерица Л. Л.* Исследование полей течений нерасчетных струй и их взаимодействие с поверхностями космических аппаратов. Техн. механика. 1997. Вып. 6. С. 91–94.
52. *Bird G. A.* Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
53. *Басс В. П., Печерица Л. Л.* Численное решение трехмерных задач динамики разреженного газа. Техническая механика. 2010. № 2. С. 38–51.
54. *Yen S. M.* Numerical solution of the nonlinear Boltzmann equation for nonequilibrium gas flow problems. Annual Review of Fluid Mechanics. 1984. V.16. P. 67–97. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.16.010184.000435
55. *Шахов Е. М.* Численные методы в динамике разреженного газа. Динамика разреженных газов и молекулярная газовая динамика. Тр. МАИ, 1988. С. 185–209.
56. *Мальцев Р. В.* Усовершенствованный метод прямого статистического моделирования для решения современных задач динамики разреженных газов. Москва, 1996. 125 с.
57. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
58. *Иванов М. С., Рогазинский С. В.* Метод прямого статистического моделирования в динамике разреженного газа. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 117
59. *Иванов М. С., Рогазинский С. В.* Экономичные схемы статистического моделирования течений разреженного газа. Матем. моделирование. 1989. Т. 1, № 7. С. 130–145.
60. *Wagner W. A* convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation. Journal of Statistical Physics, 1992. V. 66, is. 3–4. P. 1011–1044. https://doi.org/10.1007/BF01055714
61. *Ведяшкина К. А., Левина З. Ф., Ломнев С. П., Прудковский Г. П., Растопчина Т. В., Рубен Г. В., Юрченко В. В.* Решение задач методом «крупных частиц». Москва: ВЦ АН СССР, 1970. 70 с.
62. *Haviland I. K., Lavin M. L.* Application of the Monte–Carlo method to heat transfer in a rarefied gas. Phys. Fluids. 1962. Vol. 5, N 11. P. 1399–1405. https://doi.org/10.1063/1.1706536
63. *Хэвиленд Дж. К.* Решение двух задач о молекулярном течении методом Монте–Карло. Вычислительные методы в динамике разреженных газов. М.: Мир,1969. С. 7–115.
64. *Печерица Л. Л., Палий А. С.* Применение метода пробных частиц к аэродинамическому расчету КА. Техническая механика. 2017. № 3. С. 53–63. https://doi.org/10.15407/itm2017.03.053
65. *Печериця Л. Л., Сміла Т. Г.* Вплив пропорцій орбітальних об'єктів простої форми на їхні аеродинамічні характеристики. Космічна наука і технологія. 2021. 27, № 2 (129). С. 3–14. https://doi.org/10.15407/knit2021.02.003
66. *Басс В. П., Печерица Л. Л.* К расчету свободномолекулярных полей течений. Техническая механика. 2008. № 1. С. 73–82.
67. *Басс В. П., Печерица Л. Л.* Верификация методов и алгоритмов решения задач аэродинамики переходной области. Техническая механика. 2007. № 1. С. 49–61.
68. *Печерица Л. Л., Смелая Т. Г.* Применение статистического метода пробных частиц в газовой динамике. Проблемы вычислительно й механики и прочности конструкций: сб. науч. трудов. Днепр: Лира, 2018. Вып. 28, № 2. С. 142–155.
69. *Печерица Л. Л., Смелая Т. Г.* Оптимизация сеточной структуры при использовании статистического метода пробных частиц в задачах разреженной газовой динамики. Космічна наука і технологія. 2020. Т. 26, № 1 (122), С. 48–58. https://doi.org/10.15407/knit2020.01.048
70. *Печерица Л. Л.* Параллельный алгоритм метода пробных частиц для решения задач молекулярной газовой динамики. Техническая механика. 2013. № 1. С. 32–44.
71. *Печерица Л. Л.* Численные исследования параллелизации метода пробных частиц по статистически независимым испытаниям. Техническая механика. 2015. № 2. С. 100–109.
72. *Краснов И. К., Мозжорина Т. Ю., Джус Д. В.* Численное статистическое моделирование процесса обтекания летательных аппаратов потоком разреженного газа. Математическое моделирование и численные методы. 2017. №3 (15). С. 71–82.
73. *Печерица Л. Л., Смелая Т. Г.* Численное моделирование осесимметричного обтекания тел простой формы с использованием иерархических сеток. Техническая механика. 2016. № 1. С. 95–102.
74. *Печерица Л. Л., Смелая Т. Г.* Численное моделирование осесимметричного обтекания протяженного составного тела методом пробных частиц с использованием иерархических сеток. Техническая механика. 2016. № 2. С. 64–70.

Отримано 04.04.2022,
в остаточному варіанті 09.06.2022