УДК 539.3

Р. А. ИСКАНДЕРОВ, С. МОУСАВИ МОУЛАИ

КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ, НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Цель: исследование колебаний анизотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости, с протекающей жидкостью при нагружении осевой сжимающей силой. **Метод:** принцип наименьшего действия Остроградского–Гамильтона, метод рядов Фурье. **Результаты:** исследованы свободные колебания подкрепленной продольными ребрами цилиндрической оболочки, контактирующей с протекающей движущейся жидкостью, при осевом сжатии. Построены уравнения движения. При исследовании движения жидкости используется выражение для потенциала жидкости. Построено частотное уравнение подкрепленной цилиндрической оболочки, контактирующей с движущейся жидкостью. Приведен численный анализ рассмотренной задачи. Результаты вычислений представлены в виде графиков, показывающих зависимость параметра частоты от относительной скорости, угла намотки волокна в анизотропной оболочке и сжимающей силы при различных отношениях модулей упругости материала анизотропной оболочки.

Ціль: дослідження коливань анізотропної циліндричної оболонки, підкріпленої поздовжніми ребрами жорсткості, з протікаючою рідиною при навантаженні осьовою стискаючою силою. **Метод:** принцип найменшої дії Остроградського–Гамільтона, метод рядів Фур'є. **Результати:** досліджено вільні коливання підкріпленої поздовжніми ребрами циліндричної оболонки, що контактує з протікаючою рухомою рідиною, при осьовому стисненні. Побудовано рівняння руху. При дослідженні руху рідини використовується вираз для потенціалу рідини. Побудовано частотне рівняння підкріпленої циліндричної оболонки, що контактує з рухомою рідиною. Наведено числовий аналіз розглянутої задачі. Результати обчислень представлено у вигляді графіків, що показують залежність параметра частоти від відносної швидкості, кута намотування волокна в анізотропній оболонці і стискаючої сили при різних відношеннях модулів пружності матеріалу анізотропної оболонки.

The research aim is to study oscillations of an anisotropic cylindrical shell stiffened by the longitudinal ribs with the flowing fluid in motion in loading by an axial compressive force. The least action Ostrogradsky-Hamilton principle, the method of Fourier series are used. Free oscillations of the cylindrical shell stiffened by the longitudinal ribs in the contact with the flowing fluid in motion in axial compression are studied. The motion equations are derived. In the study of the fluid motion the expression for the potential of the fluid is used. The frequency equation for the stiffened cylindrical shell in contact with the fluid in motion is derived. The numerical analysis of this problem is examined. The calculation results are presented in the form of graphs of the dependence of the frequency parameter on a relative velocity, the winding angle of the anisotropic-shell fiber and a compressive force at different relations of material elasticity moduli for an anisotropic shell.

Ключевые слова: *колебания, анизотропная оболочка, осевая сжимающая сила, жидкость.*

Введение. Расчеты на прочность, колебания и устойчивость тонких оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании конструкций и сооружений различных отраслей техники. Для придания большей жесткости оболочки зачастую подкрепляются ребрами, существенно повышающими их прочность при незначительном увеличении массы конструкции. Это имеет особое значение для оболочек, нагруженных осевой сжимающей силой.

Исследованиям устойчивости и колебаний подкрепленных изотропных оболочек без движущейся среды при статическом и динамическом нагружении посвящены монографии [1, 2]. Изучение вопросов колебания и устойчивости оболочек, содержащих движущуюся жидкую или газообразную среду, имеет большое научное и прикладное значение. Различные вопросы поведения оболочек в потоке жидкости и газа рассмотрены в монографии [3]. Динамика составных оболочечных конструкций с отсеками, частично или полностью заполненными жидкостью (применительно в первую очередь к ракетной технике), рассмотрена в монографиях [4, 5].

Движение жидкости учитывается при решении задач динамики трубопроводов в [6]. Асимптотический анализ собственных частот колебаний неподкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек в упругой среде, заполненных жидкостью, проведен в работах [7, 8]. Собственные колебания в упругой среде усиленных продольной и перекрестной системой ребер изотропных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью рассмотрены в работах [9, 10]. В монографии [11] обобщены исследования колебаний оболочек с упругой и жидкой средой. В работе [12] исследована задача о свободных колебаниях усиленных продольной и перекрестной системой ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкой средой.

Отметим, что анализ колебаний длинных трубопроводов с боковыми ответвлениями, которые возбуждаются движущейся газообразной средой, изучен в [13].

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную подкрепленную продольными ребрами жесткости цилиндрическую оболочку, заполненную жидкостью. Анизотропия определяется наличием намотки. Выражение для полной энергии деформации подкрепленной продольными ребрами, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, при введенной системе координат xOz (принята гипотеза Кирхгофа–Лява) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
J = {} & \frac{1}{2}R^2\int_S\left\{N_{11}\varepsilon_{11}+N_{22}\varepsilon_{22}+N_{12}\varepsilon_{12}-M_{11}\chi_{11}-M_{22}\chi_{22}-M_{12}\chi_{12}\right\}dx\,dy+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\int_L\left[\tilde{E}_iF_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\tilde{E}_iJ_{yi}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)^2+\tilde{E}_iJ_{zi}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}\right)^2+\tilde{G}_iJ_{\kappa pi}\left(\frac{\partial\varphi_{\kappa pi}}{\partial x}\right)^2\right]dx+\\
&+\rho_0h\int_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dy+\\
&+\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\int_L\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2+\frac{J_{\kappa pi}}{F_i}\left(\frac{\partial\varphi_{\kappa pi}}{\partial t}\right)^2\right]dx-\int_S q_zw\,dx\,dy-\\
&-\frac{\sigma_xh}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2d\theta-\frac{\sigma_xF_c}{2R}\sum_{i=1}^{k_1}\int_0^{\xi_1}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\Bigg|_{\theta=\theta_i}d\xi,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где u, v, w – перемещения; N_{ij}, M_{ij} – усилия и моменты; ε_{ij}, χ_{ij} – деформации и кривизны оболочки; R, h – радиус срединной поверхности, толщина оболочки; F_i, J_{zi}, J_{yi}, $J_{\kappa pi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i-го продольного стержня относительно осей Oz, Oy и момент инерции при кручении; $\tilde{E}_i$, $\tilde{G}_i$ – модули упругости и сдвига материала i-го продольного стержня; t – время; ρ_0, ρ_i – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка и стержни; σ_x – сжимающие напряжения;

S – поверхность оболочки; L – длина продольных стержней; k_1 – число стержней.

Выражения для внутренних сил и моментов запишем в виде:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{ij} + zw_{ij}\right) dz ; \; M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{ij} + zw_{ij}\right) zdz ;$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{16}\chi_{12} ; \; w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{26}\chi_{12} ; \qquad (2)$$

$$w_{12} = w_{21} = B_{16}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{66}\chi_{12} .$$

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (2) определяются следующим образом:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{16}\varepsilon_{12} ;$$

$$\sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{26}\varepsilon_{12} ; \qquad (3)$$

$$\sigma_{12} = B_{16}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12} ;$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \; \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} ; \; \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \qquad (4)$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \; \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \; \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} .$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки, определяющего анизотропию оболочки, и находятся по формулам:

$$B_{11} = b_{11}\cos^4\varphi + b_{22}\sin^4\varphi + \left(b_{66} + 0{,}5b_{12}\right)\sin^2 2\varphi ;$$

$$B_{22} = b_{11}\sin^4\varphi + b_{22}\cos^4\varphi + \left(b_{66} + 0{,}5b_{12}\right)\sin^2 2\varphi ;$$

$$B_{12} = \left(b_{11} + b_{22} - 4b_{66}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{12}\left(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) ;$$

$$B_{66} = -\left(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{66}\cos^2 2\varphi ;$$

$$B_{26} = \frac{1}{2}\left(b_{22}\cos^4\varphi - b_{11}\sin^2\varphi\right)\sin 2\varphi - \frac{1}{6}\left(b_{12} + 2b_{66}\right)\sin 4\varphi ;$$

$$B_{16} = \frac{1}{2}\left(b_{22}\sin^2\varphi - b_{11}\cos^2\varphi\right)\sin 2\varphi - \frac{1}{6}\left(b_{12} + 2b_{66}\right)\sin 4\varphi ,$$

где b_{11}, b_{12}, b_{12} и b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала; φ – угол, образуемый направлением намотки (стекловолокном) с горизонтальной осью.

Уравнения движения продольно подкрепленной, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной оболочки с движущейся жидкостью получены на основе принципа наименьшего действия Остроградского–Гамильтона:

$$\delta W = 0 , \qquad (5)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} L dt$ – действие по Гамильтону, L – функция Лагранжа, t', t'' – заданные произвольные моменты времени.

Предполагая, что отклонения основной скорости потока U малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей φ по [3]

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2\varphi}{R\partial\xi\partial t} + U^2\frac{\partial^2\varphi}{R^2\partial\xi^2}\right) = 0 . \qquad (6)$$

На поверхности контакта оболочки с жидкостью соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид [3, 11]:

$$\vartheta_r\big|_{r=R} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\left(\omega_0\frac{\partial w}{\partial t_1} + U\frac{\partial w}{R\partial\xi}\right). \qquad (7)$$

Величина q_z определяется давлением со стороны жидкости на оболочку

$$q_z = -p \ . \qquad (8)$$

Дополняя контактными условиями (7), (8) выражение для полной энергии оболочки (1), используя уравнения движения жидкости (6), приходим к задаче о собственных колебаниях подкрепленной продольными ребрами, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью.

Решение. Перемещения оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin\chi\xi\cos n\theta \sin\omega_1 t_1 ; \\ v &= v_0 \sin\chi\xi\cos n\theta \sin\omega_1 t_1 ; \\ w &= w_0 \sin\chi\xi\cos n\theta \sin\omega_1 t_1 , \end{aligned} \qquad (9)$$

где u_0, v_0, w_0 – неизвестные постоянные; χ, n – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно; $t_1 = \omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{E_1}{\left(1-\nu^2\right)\rho_0}}$.

Потенциал возмущенных скоростей φ ищем в виде:

$$\varphi(\xi, r, \theta, t_1) = f(r)\cos n\varphi \sin kx \sin\omega t \ . \qquad (10)$$

Используя (10), из условий (6) и (7) получим:

$$\varphi = -\Phi_{\alpha n}\left(\omega_0\frac{\partial w}{\partial t_1} + U\frac{\partial w}{R\partial\xi}\right); \qquad (11)$$

$$p = \Phi_{\alpha n}\rho_m\left(\omega_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0\frac{\partial^2 w}{R\partial\xi\partial t_1} + U^2\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\xi^2}\right),$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta r), \ \ M_1 < 1; \\ J_n(\beta_1 r), \ \ M_1 > 1; \\ \frac{R}{n}, \ \ M_1 = 1; \end{cases} \qquad (12)$$

$M_1 = \dfrac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$; $\beta = \dfrac{\chi}{R}\sqrt{1 - M_1^2}$; $\beta_1 = \dfrac{\chi}{R}\sqrt{M_1^2 - 1}$; I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n; J_n – функция Бесселя первого рода порядка n.

В (8) в качестве q_z должна быть взята величина $q_z = -p$, где p – давление. С учетом (9) давление p можно представить в виде:

$$p = \frac{\rho_m \Phi_{\alpha n}}{\rho_0 \omega_0^2 h}\left(\omega_0^2 \omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_1 \chi U + \chi^2 U^2\right) w . \qquad (13)$$

После подстановки (9), (13) в (5) задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1} u_0 + a_{i2} v_0 + a_{i3} w_0 = 0 \;\; (i = 1, 2, 3) . \qquad (14)$$

Элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} $(i = 1, 2, 3)$ имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (14) возможно при значениях ω_1, при которых определитель системы (14) равен нулю. В дальнейшем используется минимальное значение ω_1. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя J_n:

$$\begin{vmatrix} 2\left(\breve{\varphi}_{11} - \psi_{11}\omega_1^2\right) & \breve{\varphi}_{44} & \breve{\varphi}_{55} \\ \breve{\varphi}_{44} & 2\left(\breve{\varphi}_{22} - \psi_{22}\omega_1^2\right) & \breve{\varphi}_{66} \\ \breve{\varphi}_{55} & \breve{\varphi}_{66} & 2\left(\breve{\varphi}_{33} - \psi_{33}\omega_1^2 + q_z^{(0)}\psi_2\right) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (15)$$

Отметим, что при $U = 0$ уравнение (15) переходит в частотное уравнение свободных колебаний подкрепленной продольными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки с покоящейся жидкостью при осевом сжатии.

Результаты численного анализа. Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных на основе приведенных выше зависимостей с использованием компьютера.

Расчеты проведены для следующих геометрических и механических параметров оболочки и среды:

$F_i = 3{,}4$ мм^2; $J_{yi} = 5{,}1$ мм^4; $\rho_0 / \rho_m = 0{,}105$; $\rho_0 = \rho_i = 0{,}26 \cdot 10^4$ Nc^2 /м^4; $J_{yi} = 5{,}1$ мм^4; $h = 1$ мм; $h_i = 1{,}39$ мм; $L = 10$ м; $b_{11} = 18{,}3$ ГПа; $b_{12} = 2{,}77$ ГПа; $b_{22} = 25{,}2$ ГПа; $b_{66} = 3{,}5$ ГПа; $\dfrac{I_{\kappa pi}}{2\pi R^3 h} = 0{,}5305 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты ω_1 от относительной скорости потока $U^* = U / c$, $c = \omega_0 R$ при значениях χ = 1, n =4, $\varphi = 0{,}6$; на рис. 2 – зависимость параметра частоты свободных колебаний от угла намотки φ при различных отношениях $\dfrac{R}{h}$; на рис. 3 – зависимости параметра частоты ω_1 от сжимающих напряжений (при значениях n =4, k_1 =4, U^* =0,06) для различных отношений модулей упругости материала оболочек (E_1 и E_2 – модули упругости вдоль образующей и в окружном направлении соответственно).

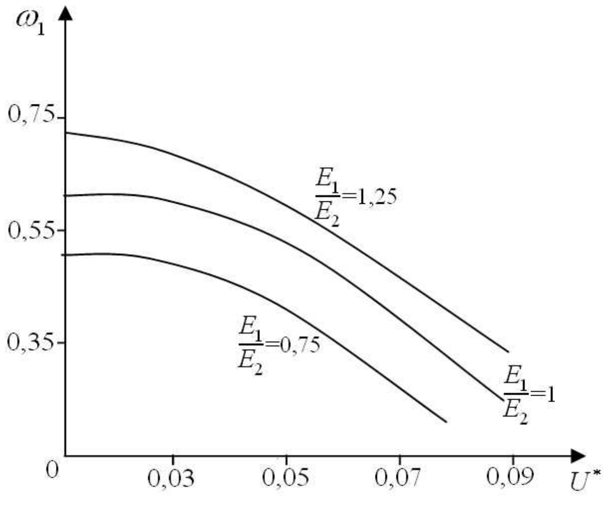

Рис. 1

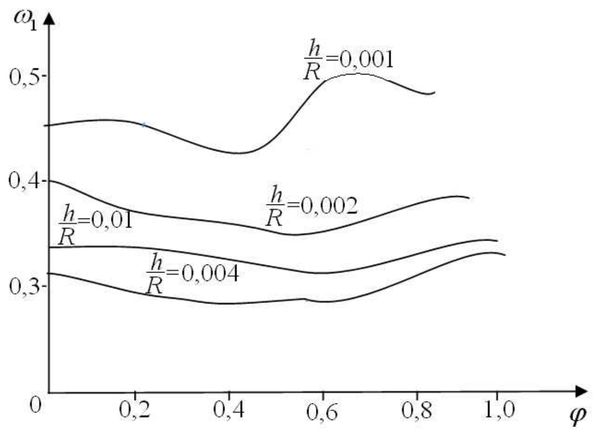

Рис. 2

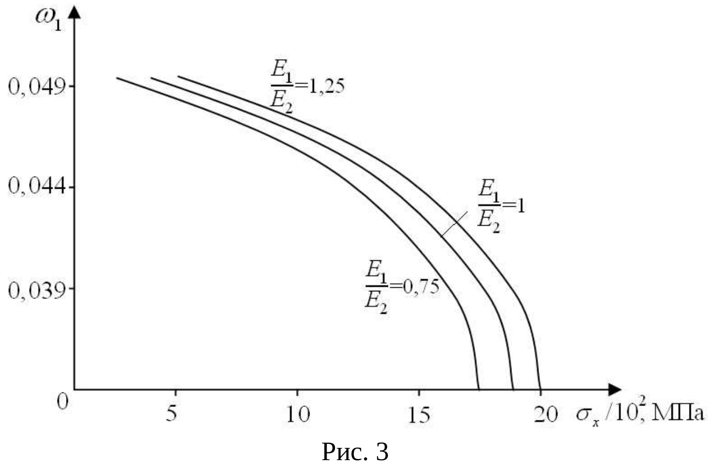

Рис. 3

Увеличение скорости и учет вязкости материала оболочки приводит к снижению частоты. Важно отметить критические значения U^*, при которых частота колебаний обращается в нуль. Очевидно, здесь может произойти потеря устойчивости оболочки.

1. *Амиро И. Я.* Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек / *И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий* // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М. : ВИНИТИ, 1990. – С. 132 – 191.
2. *Амиро И. Я.* Теория ребристых оболочек / *И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий* // Методы расчета оболочек : в 5 т. / под ред. А. Н. Гузя. – Т. 2. – К. : Наук. думка, 1980. – 368 с.
3. *Вольмир С. А.* Оболочки в потоке жидкости и газа / *С. А. Вольмир* // Задачи аэроупругости. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
4. *Микишев Г. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / *Г. И. Микишев, Б. И. Рабинович.* – М. : Машиностроение, 1971. – 563 с.
5. *Рабинович Б. И.* Ведение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / *Б. И. Рабинович.* – М. : Машиностроение, 1975. – 296 с.
6. *Latifov F. S.* Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid / *F. S. Latifov, F. A. Seyfullayev* // Proc. IMM of Trans. of Nat. Acad. of Sci. of Azerbaijan. Ser. Phys.-techn. and Math. Sci. – 2004. – V. XVIV, № 1. – P. 227 – 230.
7. *Сейфуллаев Ф. А.* Асимптотический анализ собственных частот осесимметрических колебаний ортотропных цилиндрической оболочек в бесконечной упругой среде, заполненный жидкостью / *Ф. А. Сейфуллаев* // Механика и машиностроение (Мин. обр. Азербайдж.). – 2004. – № 4. – С. 33 – 34.
8. *Алиев Ф. Ф.* Собственные колебания в бесконечной упругой среде продольно подкрепленной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / *Ф. Ф. Алиев* // Механика и машиностроение (Мин. обр. Азербайдж.). – 2006. – № 1. – С. 3 – 5.
9. *Алиев Ф. Ф.* Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / *Ф. Ф. Алиев* // Механика и машиностроение (Мин. обр. Азербайдж.). – 2007. – № 2. – С. 10 – 12.
10. *Латифов Ф. С.* Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненных средой / *Ф. С. Латифов, С. Г. Сулейманова* // Механика машин, механизмов и материалов (Объед. ин-т машиностроения НАН Белоруссии). – 2009. – № 1. – С. 59 – 62.
11. *Латифов Ф. С.* Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / *Ф. С Латифов.* – Баку : Элм, 1999. – 164 с.
12. *Сулейманова С. Г.* Свободные колебания продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с заполнителем / *С. Г. Сулейманова* // Proc. IMM of Trans. of Nat. Acad. of Sci. of Azerbaijan. – 2007. – V. XXV. – P. 135 – 140.
13. *Орыняк И. В.* Анализ колебаний длинных трубопроводов с боковыми отверстиями, возбуждаемых движущейся газообразной средой / *И. В. Орыняк, Я. Р. Дуб, А. С. Гатура* // Пробл. прочности. – 2015. – № 2. – С. 116 – 137.

Азербайджанский
архитектурно-строительный университет,
Баку, Азербайджан

Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджан

Получено 27.07.2015,
в окончательном варианте 28.09.2015