УДК 629.76/.78:519.25

Л. В. КРИВОБОКОВ, Д. В. ДУНАЕВ, А. В. ДЕМЧЕНКО

ОЦЕНИВАНИЕ АДЕКВАТНОСТИ УСЛОВИЙ ОТРАБОТКИ ИЗДЕЛИЙ РАКЕТНОЙ ТЕХНИКИ КАК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»,
ул. Криворожская 3, 49008, Днепр, Украина, e-mail: dimor9diit@gmail.com

Одним з найважливіших завдань експериментального відпрацювання виробів ракетної техніки є встановлення ступеня адекватності умов відпрацювання систем ракет космічного призначення (РКП) і складних систем типу РКП. Метою даної роботи є розробка методичного підходу для встановлення ступеня адекватності умов відпрацювання систем РКП і складних систем типу РКП. Цей підхід включає: теорію статистичної подібності систем РКП на порівнюваних етапах, метод головних компонент, нормальний закон розподілу випадкових значень параметрів системи, отриманих за результатами випробувань, а також геометричну інтерпретацію частинної кореляції і регресії, еліпсоїди розсіювання. На підставі запропонованого методичного підходу визначено критерій у вигляді співвідношення між еліпсоїдами розсіювання, що характеризують випробування (наземні і натурні), з урахуванням їх взаємного розташування на порівнюваних етапах. В результаті застосування цього підходу отримано вираз для точкового значення статистичного критерію подібності, яке зменшує обсяги випробувань складних систем типу РКП, уточнює показники надійності і дозволяє оптимізувати вартість створення РКП.

Одной из важнейших задач экспериментальной отработки изделий ракетной техники является установление степени адекватности условий отработки систем ракет космического назначения (РКН) и сложных систем типа РКН. Целью данной работы является разработка методического подхода для установления степени адекватности условий отработки систем РКН и сложных систем типа РКН. Этот подход включает: теорию статистического подобия систем РКН на сравниваемых этапах, метод главных компонент, нормальный закон распределения случайных значений параметров системы, полученных по результатам испытаний, а также геометрическую интерпретацию частной корреляции и регрессии, эллипсоиды рассеяния. На основании предложенного методического подхода определен критерий в виде соотношения между эллипсоидами рассеяния, характеризующими испытания (наземные и натурные), с учетом их взаимного расположения на сравниваемых этапах. В результате применения данного подхода получено выражение для точечного значения статистического критерия подобия, которое уменьшает объемы испытаний сложных систем типа РКН, уточняет показатели надежности и позволяет оптимизировать стоимость создания РКН.

One of the most important problems in the experimental development of rocketry hardware is to determine the degree of adequacy of conditions for the development of space rocket (SR) systems and SR-type complex systems. The aim of this paper is to develop a methodological approach to the determination of the above conditions. This approach includes the theory of statistical similarity of SR systems at comparison stages, the principal components method, the normal distribution law for random values of system parameters measured during tests, a geometrical interpretation of partial correlation and regression, and dispersion ellipsoids. Based on the proposed methodological approach, a criterion is determined in the form of a relation between the dispersion ellipsoids that characterize tests (ground ones and full-scale ones) with account for their positional relationship at comparison stages. The proposed approach has made it possible to obtain an expression for the point value of statistical similarity criterion which reduces the extent of testing for SR-type complex systems, refines the reliability indices, and allows one to optimize the SR development cost.

Ключевые слова: *статистический критерий, эллипсоид рассеяния, метод главных компонент, ракета космического назначения.*

Введение. В процессе создания современных технических систем важное место занимают испытания, в частности отработочные, целью которых является определение технических характеристик и показателей надежности при имитации условий эксплуатации и внешних воздействий по заданной программе. В практике отработки сложных систем (самолетных, ракетных, корабельных комплексов, энергетических и транспортных систем) широко используются методы теории подобия физических процессов, происходящих в модели и натурных условиях, что позволяет оптимизировать общие затраты на отработку и время испытаний. Одним из решений поставленной проблемы является применение методов теории статистического подобия [1] для обоснования критерия адекватности условий отработки сложных систем типа ракет космического назначения (РКН) и их систем, а также количественных зависимостей, позволяющих проводить оценку статистического подобия сравниваемых условий отработки.

Метод решения задачи. Под условиями отработки сложных систем типа РКН и ее составных частей понимаем совокупность внешних условий и внутренних параметров работоспособности и связей между ними. Подобие условий отработки есть количественная мера соотношения между условиями на сравниваемых этапах отработки.

По классической теории необходимым условием подобия сравниваемых явлений (объекта и модели, изделий, процессов и т. п.) является идентичность критериев подобия в сходные моменты и в сходственных точках пространства [1, 2]

$$\text{®}_1 = \frac{x_1^{a_1}}{x_{k+1}^{a_{k+1}}} = idem,\ \text{®}_2 = \frac{x_2^{a_2}}{x_{k+2}^{a_{k+2}}} = idem, \ldots, \pi_k = \frac{x_k^{a_m}}{x_{k+m}^{a_{k+m}}} = idem, \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$ – детерминированные характеристики системы на первом, втором, *k*-ом этапе отработки; $a_1, a_2, ..., a_k$ – показатели размерностей основных величин системы на первом, втором, *k*-ом этапе отработки; $k + m$ – общее количество параметров подобия на сравниваемом этапе отработки; $x_{k+1}, ..., x_{k+m}$ – детерминированные характеристики системы на сравниваемом этапе отработки; $a_{k+1}, ..., a_{k+m}$ – показатели размерностей основных величин на сравниваемом этапе отработки.

При полном выполнении условий (1) в классической постановке явления подобны, а при невыполнении хотя бы одного из условий ($\text{®}_j \neq idem$) – не подобны. В такой постановке установить количественную меру адекватности условий отработки системы практически невозможно по следующим причинам:

– набор параметров, характеризующих условия отработки, должен быть полным, неточность в определении такого набора приводит к значительным ошибкам при расчетах;

– результаты испытаний являются случайными величинами, поэтому вероятность получения зависимости (1) равна 0;

– классические методы не решают задачу установления количественной меры подобия.

Анализ практики отработки систем показывает, что за счет ужесточения условий проведения испытаний (расширение интервалов варьирования внешних и внутренних факторов, проведение испытаний при наиболее неблагоприятных сочетаниях допусков, проведение ускоренных испытаний и т. д.) можно достигнуть статистического подобия. Введем понятие «сходные параметры» – однотипные параметры, определяемые на сравниваемых этапах (например, температура в камере сгорания прототипа и сравниваемого ракетного двигателя, давление в баллоне системы подачи топлива прототипа и сравниваемого двигателя и т. д.).

С учетом рекомендаций [1] определим условия статистического подобия систем РКН на сравниваемых этапах:

– законы распределения сходных параметров на сравниваемых этапах неизменны и соответствуют нормальному;

– сходные параметры измеряются однотипными датчиками с одной и той же точностью;

– подобие условий полностью определяется сходными параметрами, характеризующими работоспособность системы.

При этом под работоспособностью понимается конкретное значение параметра, характеризующего функционирование системы в определенных внешних и внутренних условиях, заданных в нормативно-технической документации и(или) конструкторской документации (например, техническое задание на проведение испытания, техническое задание на систему и т. д.).

В этом случае можно с большей долей достоверности считать, что почти все отличия условий отработки на сравниваемых этапах описываются диапазонами испытаний сходных параметров работоспособности и их статистической зависимостью в виде корреляционной матрицы.

Известно, что наиболее общей статистической характеристикой, позволяющей интерпретировать количественно результаты испытаний с учетом разброса и корреляций, является *n*-мерный эллипсоид рассеяния [3]. Объем такого эллипсоида размерности *n* равен [3]

$$V = \frac{(n+2)^{n/2} \circledR^{\,n/2} \sqrt{B}}{\Gamma(0{,}5n+1)}, \qquad (2)$$

где $B = \det\{\rho\}$ – детерминант матрицы коэффициентов ковариации ρ_{ih} ($i, h = 1, 2, \ldots, n$ – число параметров, которые сравниваются); $\Gamma(\ )$ – гамма-функция.

Целесообразно в качестве количественного критерия адекватности (подобия) условий отработки систем РКН принять соотношение между объемами эллипсоидов рассеивания на сравниваемых этапах отработки V_1 и V_2 соответственно

$$T_\pi = \frac{V_1}{V_2}, \qquad (3)$$

откуда с учетом (2) имеем

$$T_\circledR = \frac{\dfrac{(n_1+2)^{n_1/2} \circledR^{\,n_1/2} \sqrt{\det B_1}}{\Gamma(0{,}5n_1+1)}}{\dfrac{(n_2+2)^{n_2/2} \circledR^{\,n_2/2} \sqrt{\det B_2}}{\Gamma(0{,}5n_2+1)}}. \qquad (4)$$

Для систем, которые отрабатываются на двух сравниваемых этапах испытаний, при оценке используются один и тот же набор параметров, т. е. $n_1 = n_2$, и окончательно выражение (4) примет вид

$$T_\pi = \sqrt{\frac{\det B_1}{\det B_2}}. \qquad (5)$$

Согласно известной теории, зависимости для описания частной регрессии и корреляции формально можно интерпретировать в тригонометрических терминах в виде соотношений между длинами векторов и углов между ними [4]. Следовательно, предложенный критерий (5) может быть представлен как соотношение n-мерных эллипсоидов рассеяния, причем необходимым условием статистического подобия является количественное соотношение между объемами эллипсоидов, а достаточным – подобное расположение в пространстве эллипсоидов рассеяния при проектировании их на плоскость [4]. Предположим, что есть n результатов выборки $p < n$ случайных величин

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1p};\ x_{21}, x_{22}, ..., x_{2p};\ \dots\ x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{np}.$$

Рассмотрим n-мерное выборочное пространство. Случайным значениям $x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk}$ k-ой случайной величины в этом пространстве будет соответствовать одна точка, следовательно, имеется p точек $Q_1, Q_2, ..., Q_p$, далее предположим, что все переменные отсчитываются от своих средних, а точка P является началом координат, что представлено на рис. 1. В этом случае квадрат длины вектора PQ_l представляет собой дисперсию $n\sigma_l^2$. Обобщая «p» точек Q_i и начало координат (точка P на рис. 1), определяют подпространство дисперсий размерности p в n-мерном пространстве. Согласно тригонометрической интерпретации, косинус угла θ между PQ_l и PQ_m будет коэффициентом корреляции $\rho_{lm} = \cos\theta$, т. е. все зависимости, связывающие p точек в n-мерном пространстве, могут быть выражены длинами векторов PQ_i и углов между ними.

Рассмотрим векторы дисперсий $Q_{1l}, Q_{2l}, ..., Q_{pl}$. Косинус угла между Q_{1l} и Q_{2l} обозначим $\cos\theta$ (соответствует частному коэффициенту корреляции $\rho_{12.lp}$ между x_1 и x_2 при фиксированных $x_3, ..., x_p$) тогда каждый из $Q_{2l}, ..., Q_{pl}$ ортогонален к подпространству, натянутому на $P_1Q_3...Q_{p-1}$. Если опустить перпендикуляр из Q_{1l} на Q_{pl}, то точка M будет основанием перпендикуляра. Пусть также $Q_{2l}M$ перпендикулярна P_1Q_{pl}, тогда MQ_{1l} и MQ_{2l} ортогональны к пространству, натянутому на $P_1Q_3...Q_p$, и косинус угла между ними, обозначенный как φ на рис. 1, равен коэффициенту корреляции $\rho_{12.lp}$, тогда

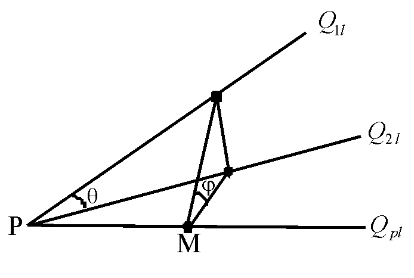

Рис. 1 – Геометрическая интерпретация частной корреляции

$$\sin\varphi = \frac{Q_{1l}Q_{2l}}{MQ_{1l}},\ \sin\theta = \frac{Q_{1l}Q_{2l}}{PQ_{1l}}.$$

Из сравнения значений sin¨ и sin¯ видно, что числители в этих выражениях равны между собой, а знаменатели составляют неравенство $MQ_{1l} < PQ_{1l}$, т. е.

$$\rho_{12.lp} < \rho_{12.l}. \qquad (6)$$

Из соотношения (6) следуют важные для дальнейших рассуждений выводы:

1) в случае сравнения этапов натурных (летных) и наземных испытаний в соответствии с (5) определитель матрицы условных коэффициентов корреляции наземных испытаний будет больше определителя матрицы безусловных коэффициентов корреляции натурных испытаний и, соответственно, объем эллипсоида наземных испытаний больше объема эллипсоида натурных (летных) испытаний (т. е. $T_\pi \geq 1$);

2) предложенный критерий (3) однозначно характеризуется соотношениями дисперсионных матриц, полученных по результатам наземных и летных испытаний;

3) ввиду неидентичности расположения условной и безусловной дисперсионных матриц, необходимо учитывать взаимное расположение эллипсоидов в *n*-мерном пространстве измеряемых параметров.

В соответствии с [5] детерминанты ковариационной матрицы в выражении (5) равны детерминантам ковариационной матрицы главных компонент.

Применим метод главных компонент [5, 6] для определения зависимости величины статистического подобия условий отработки (5).

Согласно первому выводу из соотношения (6) и переходя к вероятностной форме критерия, получим соотношение

$$P(T_\pi \geq 1) = Bep(\det V_1 \geq \det V_2), \tag{7}$$

где V_1 и V_2 – объем эллипсоида рассеяния для наземных и натурных испытаний соответственно.

Из [5] известно, что

$$\det Q_1 = \det A_1 = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i , \tag{8}$$

где Q_1 и A_1 – ковариационная матрица исходных данных и главных компонент соответственно; λ_i – собственные числа матрицы A_1 (являются дисперсиями главных компонент).

Выражение (7) можно записать следующим образом

$$Bep(\det A_1 \geq \det A_1') = Bep(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \geq \lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_p'), \tag{9}$$

где A_1 и A_1' – ковариационные матрицы для эллипсоидов объема V_1 и V_2 соответственно; λ_i и λ_i' – собственные числа матриц A_1 и A_1' соответственно; p – общее количество главных компонент.

Учитывая, что главные компоненты являются случайными независимыми величинами, выражение (9) преобразуется к виду

$$Bep(T_\pi \geq 1) = Bep(\lambda_1 \geq \lambda_1') \cdot Bep(\lambda_2 \geq \lambda_2') \times ... \times Bep(\lambda_p \geq \lambda_p').$$

Практические расчеты по методу главных компонент показывают, что первая главная компонента $\lambda = \lambda_{\max}$, как правило, описывает 80…95 % общего разброса. Переходя к приближенному равенству, получим

$$P(T_\pi \geq 1) \approx Bep(\lambda_{\max} \geq \lambda_{\max}'). \tag{10}$$

Для корректности выражения (10) необходимо учесть взаимное расположение эллипсоидов друг относительно друга, что можно сделать с помощью учета угла θ

$$P(T_\pi \geq 1) = Bep(\lambda_{\max} \cos\theta \geq \lambda'_{\max}). \tag{11}$$

Для вычисления значения угла θ воспользуемся геометрической интерпретацией частной корреляции и регрессии [4]. Если имеется *p*-мерное пространство исходных данных, то мерой зависимости величины *x* от остальных параметров является множественный коэффициент корреляции [4], что в геометрической интерпретации (рис. 2) является косинусом угла φ между вектором $\vec{A}$ наблюдений *x* и вектором $\vec{B}$, лежащим в $(p-1)$-мерном пространстве дисперсий остальных $(p-1)$ переменных и минимизирующим угол с $\vec{A}$ [4], тогда $\cos\varphi = |A|/|B|$. После выбора направления вектора $\vec{A}$ вдоль большой оси эллипсоида рассеяния переменных *x*, вектор $\vec{B}$ будет направлен вдоль направления дисперсии остальных $(p-1)$ величин

$$\cos\varphi = \frac{D(x)}{D(x_{p-1})}, \tag{12}$$

где $D(x)$ – дисперсия величины *x*; $D(x_{p-1})$ – дисперсия остальных $(p-1)$ величин.

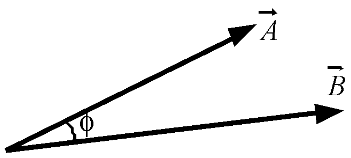

Рис. 2 – Геометрическая интерпретация косинусом угла φ

С другой стороны, согласно методу главных компонент, если вектор максимального значения собственного числа $\lambda^{\text{кор}}_{\max}$ корреляционной матрицы направлен вдоль большой оси эллипсоида рассеяния, то дисперсия остальных $(p-1)$ переменных равна [5]

$$D(x_{p-1}) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i^{\text{кор}} - \lambda^{\text{кор}}_{\max}, \tag{13}$$

где $\lambda_i^{\text{кор}}$ – собственные числа корреляционной матрицы.

Для корреляционной матрицы $\sum \lambda_i = p$ окончательно выражение $\cos\varphi = |A|/|B|$ примет вид $\cos\varphi = \lambda^{\text{кор}}_{\max} / (p - \lambda^{\text{кор}}_{\max})$, откуда $\varphi = \arccos\left[\lambda^{\text{кор}}_{\max} / (p - \lambda^{\text{кор}}_{\max})\right]$.

Следовательно, минимальный угол θ равен

$$\theta = \arccos\frac{\lambda^{\text{кор}}_{1\max}}{p_1 - \lambda^{кор}_{1\max}} - \arccos\frac{\lambda'^{\text{кор}}_{1\max}}{p_1 - \lambda'^{\text{кор}}_{1\max}}, \tag{14}$$

где $\lambda^{\text{кор}}_{1\max}$, $\lambda'^{\text{кор}}_{1\max}$ – максимальное собственное число корреляционной матрицы для сравниваемых этапов.

В работе [7] доказано, что если исходные параметры подчиняются многомерному нормальному распределению, то собственные значения выборочной ковариационной матрицы распределены асимптотически нормально. Тогда точечное значение (11) примет вид

$$P(T_{\pi} \geq 1) = \Phi\left[\frac{\lambda_{1\max}\cos^{-} - \lambda'_{1\max}}{\sqrt{D(\lambda_{1\max}\cos^{-} - \lambda'_{1\max})}}\right], \tag{15}$$

где $\Phi[\ ]$ – функция Лапласа; $D(\ )$ – дисперсия.

Согласно [6] выборочное значение дисперсии собственных чисел равно

$$D(\lambda_i) = 2\lambda_i^2 / n, \tag{16}$$

где n – объем выборки, по которой определялось значение λ_i.

В соответствии с (16)

$$D(\lambda_{1\max}\cos^{-} - \lambda'_{1\max}) = D(\lambda_{1\max}\cos^{-}) + D(\lambda'_{1\max}) = \frac{2\lambda_{1\max}^2}{n_1}\cos^{-} + \frac{2(\lambda'_{2\max})^2}{n_2}, \tag{17}$$

где n_1 и n_2 – объем выборки, по которой определялись значения $\lambda_{1\max}$ и $\lambda'_{1\max}$ соответственно.

С учетом (17) точечное значение критерия подобия примет вид

$$P(T_{\pi} \geq 1) = \Phi\left[\frac{\lambda_{1\max}\cos\theta - \lambda'_{1\max}}{\sqrt{2\left(\frac{\lambda_{1\max}^2}{n_1}\cos\theta + \frac{(\lambda'_{2\max})^2}{n_2}\right)}}\right].$$

Выводы. Предложен статистический критерий адекватности условий отработки сложных систем типа ракет космического назначения в виде соотношения между эллипсоидами рассеяния на сравниваемых этапах.

Для количественной оценки критерия предложено использовать метод главных компонент (первая главная компонента), а также нормальный закон распределения случайных значений параметров системы, полученных по результатам испытаний.

Показана необходимость учета при расчетах не только объемов эллипсоидов, но и их взаимного расположения, что реализовано с применением корреляционных матриц, полученных по результатам испытаний.

Получено выражение для точечного значения статистического критерия подобия, которое позволяет использовать его для уменьшения объемов испытаний сложных систем типа ракет космического назначения и уточнения показателей надежности.

1. *Северцев Н. А., Шолкин В. Г., Ярыгин Г. А.* Статистическая теория подобия: Надежность технических систем. М.: Наука, 1986. 205 с.
2. *Веников М. А.* Теория подобия и моделирования. М.: Высшая школа, 1976. 479 с.
3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. Пер. с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Мир, 1975. 648 с.
4. *Кендалл М., Стьюарт А.* Том 2: Статистические выводы и связи. Пер. с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Наука, 1973. 900 с.

5. *Айвазян С. А., Енюков Е. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
6. *Кендалл М., Стьюарт А.* Том 3: Многомерный статистический анализ и временные ряды. Пер. с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Наука, 1976. 736 с.
7. *Anderson T. W.* Asymtotic theory for principal component analysis. Institute of Mathematical Statistics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extent access to Annals Mathematical Statistics, 1963. P.122–148.

Получено 01.06.2017
в окончательном варианте 26.09.2017