

ДИНАМІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ КОМПОЗИТНОЇ ОБОЛОНКИ, ВИГОТОВЛЕНОЇ АДИТИВНИМИ ТЕХНОЛОГІЯМИ, З ГАЗОВИМ ПОТОКОМ

¹ Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного

Національної академії наук України,

вул. Комунальників, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: kvavr@kharkov.ua

² Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сикорського»,

пр. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна

³ Харківський національний автомобільно-дорожній університет,

вул. Ярослава Мудрого, 25, 61002, Харків, Україна

Досліджується динамічна нестійкість складеної циліндрично-конічної сендвіч тонкостінної конструкції, яка взаємодіє з надзвуковим газовим потоком. Ця конструкція складається з трьох шарів. Середній шар виготовляється адитивними технологіями FDM з ULTEM матеріалу. Два шари обшивки виготовлені з вуглепластику. Для побудови моделі динамічної нестійкості конструкції насамперед досліджуються вільні лінійні коливання за допомогою напіваналітичного метода Релея–Рітца. У результаті його використання розраховуються власні частоти та форми коливань, які добре збігаються з результатами скінченно-елементного моделювання у програмному комплексі ANSYS. Форми коливань, отримані внаслідок цього розрахунку, використовувались для побудови моделі динамічної нестійкості складеної конструкції. Ця модель є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат конструкції. Надзвуковий газовий потік описується поршневою теорією, яка враховує кут атаки. Дослідження динамічної нестійкості складеної конструкції зводиться до аналізу нестійкості тривіальної рівноваги системи звичайних диференціальних рівнянь. Для аналізу нестійкості використовуються характеристичні показники, які розраховуються з проблеми власних значень. При куті атаки 12° та низьких значеннях чисел Маха мінімальне значення критичного тиску спостерігається при трьох колових хвилях, а при підвищенні швидкості потоку мінімальне значення критичного тиску спостерігається при чотирьох та п'яти колових хвилях. При куті атаки 6° та при низьких значеннях чисел Маха мінімальний критичний тиск спостерігається при двох колових хвилях. З підвищенням швидкості потоку мінімальний критичний тиск спостерігається при трьох та чотирьох колових хвилях. Втрата динамічної стійкості відбувається на формах з невеликим числом колових хвиль $2 \div 5$.

Ключові слова: динамічна нестійкість, надзвуковий газовий потік, складена тонкостінна конструкція.

The dynamic instability of a composite cylindrical-conical thin-walled structure interacting with a supersonic gas flow is analyzed. This structure consists of three layers. The middle layer is manufactured by FDM additive technologies from ULTEM material. The top and bottom layers are manufactured from carbon-filled plastic. Free linear vibrations of the thin-walled structure are studied by Rayleigh–Ritz semi-analytical method to obtain a model of dynamic instability. The free linear vibrations are analyzed numerically. The obtained eigenfrequencies and eigenmodes are in close agreement with the data obtained by the ANSYS commercial software. The calculated eigenmodes were used to construct a model of composite cylindrical-conical shell instability. This model of instability is a system of ordinary linear differential equations in the generalized coordinates of the thin-walled structure. The supersonic gas flow is described by a piston theory, which accounts for the angle of attack. The study of the dynamic instability of the composite cylindrical-conical shell reduces to analyzing the trivial equilibrium instability of the system of ordinary differential equations. Characteristic exponents are calculated to analyze the stability of the trivial solution. These characteristic exponents are calculated from an eigenvalue problem. If the angle of attack is 12° and the Mach number is small, the minimal value of the critical pressure is observed for three circular waves. If the Mach number is increased, the minimal critical pressure is observed for four and five circular waves. If the angle of attack is 6° and the Mach number is small, the minimal critical pressure is observed for two circular waves. If the Mach number is increased, the minimal critical pressure is observed for three and four circular waves. The dynamic stability is lost for eigenmodes with a small number of circular waves ($2 \div 5$).

Key words: dynamic instability, supersonic gas flow, composite thin-walled structure.

Вступ. Складені композитні сендвіч конструкції використовуються в аерокосмічній техніці у якості обтічників та корпусних елементів літаків. Сендвіч композитні конструкції легкі та міцні. В цьому їх перевага перед металевими конструкціями. Втрата статичної стійкості складеної сендвіч конструкції із стільниковим заповнювачем під дією зовнішнього тиску

© Б. В. Успенський, К. С. Аврамов, О. Ф. Саленко, О. Я. Ніконов, 2024

Техн. механіка. – 2024. – № 3.

аналізується в [1]. Втрата статичної стійкості складеної нанокompозитної конструкції, посиленої нанотрубками, розглядається у роботі [2]. Взаємодія складеної тонкостінної конструкції, посиленої вуглецевими нанотрубками з надзвуковим газовим потоком, обговорюється у [3]. Лінійні коливання складеної сендвіч тонкостінної конструкції аналізуються з використанням теорії зсуву першого порядку в [4]. Варіаційний принцип Гамільтона використовується для отримання рівнянь руху складеної тонкостінної конструкції, виготовленої з функціонально-градієнтного матеріалу [5]. Коливання багатошарової композитної складеної оболонки досліджуються за допомогою рядів Фур'є у [6]. Чисельний та експериментальний аналіз складеної композитної тонкостінної конструкції, виготовленої з вуглепластику з демпфуючим шаром, розглядається у [7].

В цій статті побудовано математичну модель динамічної нестійкості складеної сендвіч циліндрично-конічної оболонки із стільниковим заповнювачем, який виготовлений адитивними технологіями. Шари обшивки виготовлені з вуглепластику. Динамічна нестійкість спостерігається внаслідок взаємодії конструкції з надзвуковим газовим потоком, який описується поршневою теорією. Для отримання цієї динамічної моделі аналізуються вільні коливання тонкостінної конструкції напіваналітичним методом Релея–Рітца. Отримані власні частоти добре збігаються з результатами моделювання у скінченно-елементному пакеті ANSYS. Аналізуються області динамічної нестійкості у площині параметрів динамічної моделі.

Формулювання задачі. Розглянемо тонкостінну конструкцію, яка складається з конічної та циліндричної оболонок (рис. 1), виготовлених з тришарового композиту із стільниковим заповнювачем у якості середнього шару (рис. 1). Циліндричний кінець оболонки затиснутий, конічний кінець є вільним. Зовнішній та внутрішній шари оболонки (обшивки) є тонкими та виготовлені з вуглепластику, який є ортотропним композитним матеріалом. Середній шар оболонки являє собою стільниковий заповнювач з геометрією комірки, яку зображено на рис. 1. Стільниковий заповнювач виготовляється за допомогою адитивної технології FDM. Шар заповнювача є набагато товстішим за шари обшивок. З'єднання між обшивками і заповнювачем вважається абсолютно жорстким.

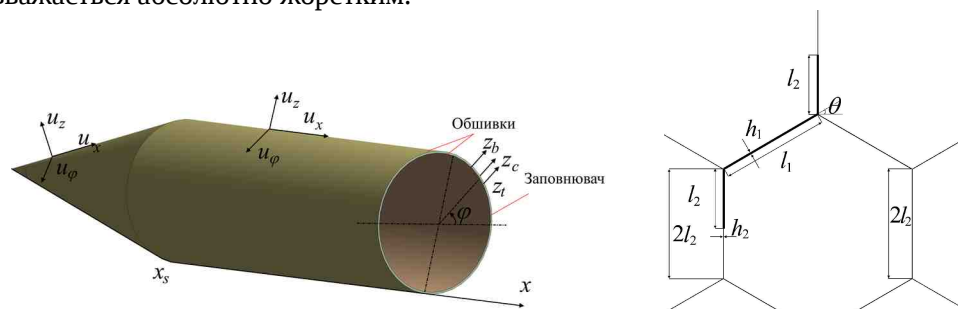


Рис. 1 – Ескіз складеної конструкції та ескіз комірки стільникового заповнювача

Довжина оболонки вздовж твірної лінії дорівнює $L = x_s + L_2$, де x_s , L_2 – довжина конічної та циліндричної частин оболонки вздовж твірної лінії. Внутрішній радіус циліндричної частини оболонки дорівнює R . Шари

оболонки мають товщини h_t, h_c, h_b , де індекс t відповідає зовнішній обшивці, b – внутрішній обшивці, c – шару заповнювача.

На оболонку діє надзвуковий газовий потік під кутом атаки β , який спричиняє динамічну нестійкість оболонки та її автоколивання. Для побудови математичної моделі оболонки введемо систему координат, яку зображено на рис. 1: $x \in [0; L]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$; $z_i \in \left[-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right]$, $i = t, b, c$.

Обшивки оболонки створено із ортотропного матеріалу, який задовольняє закону Гука

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_\varphi^{(i)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 \\ Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_\varphi^{(i)} \end{bmatrix}; \\ \sigma_\varphi^{(i)} &= G_\varphi \varepsilon_\varphi^{(i)}; \sigma_x^{(i)} = G_x \varepsilon_x^{(i)}; \sigma_x^{(i)} = G_x \varepsilon_x^{(i)}, i = t, b; \\ Q_1 &= \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_\varphi}; Q_2 = \frac{E_\varphi}{1 - \mu_x \mu_\varphi}; Q_1 = \frac{\mu_\varphi E_x}{1 - \mu_x \mu_\varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\varepsilon_x^{(i)}, \varepsilon_\varphi^{(i)}, \varepsilon_\varphi^{(i)}, \varepsilon_x^{(i)}, \varepsilon_x^{(i)}$ – елементи тензора деформацій; $\sigma_x^{(i)}, \sigma_\varphi^{(i)}, \sigma_x^{(i)}, \sigma_x^{(i)}$, $\sigma_\varphi^{(i)}$ – елементи тензора напружень; E_x, E_φ – модулі Юнга матеріалу; μ_x, μ_φ – коефіцієнти Пуассона; G_φ, G_x, G_x – модулі зсуву.

Шар стільникового заповнювача створено адитивною технологією FDM. Усереднені механічні властивості цього шару були розраховані за процедурою скінченно-елементної гомогенізації [8]. У результаті цієї процедури отримано суцільний гомогенізований ортотропний шар замість стільникового заповнювача. Закон Гука для цього шару має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(c)} \\ \sigma_\varphi^{(c)} \\ \sigma_z^{(c)} \\ \sigma_\varphi^{(c)} \\ \sigma_x^{(c)} \\ \sigma_x^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(c)} \\ \varepsilon_\varphi^{(c)} \\ \varepsilon_z^{(c)} \\ 2\varepsilon_\varphi^{(c)} \\ 2\varepsilon_x^{(c)} \\ 2\varepsilon_x^{(c)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $\sigma_x^{(c)}, \sigma_\varphi^{(c)}, \sigma_z^{(c)}, \sigma_\varphi^{(c)}, \sigma_x^{(c)}, \sigma_x^{(c)}$ – елементи тензора напружень; $\varepsilon_x^{(c)}, \varepsilon_\varphi^{(c)}, \varepsilon_z^{(c)}, \varepsilon_\varphi^{(c)}, \varepsilon_x^{(c)}, \varepsilon_x^{(c)}$ – елементи тензора деформацій. Елементи матриці $C_1, C_1, \dots$ визначаються за процедурою скінченно-елементної гомогенізації.

Основні рівняння коливань. Проекції переміщень i -го шару оболонки на координатні лінії (x, φ, z_i) позначимо $u_x^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_\varphi^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), u_z^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau), i = \{t, c, b\}$, де τ – час. Ці переміщення розкладемо за поперечною координатою z_i згідно із зсувною теорією Реді високого порядку [9]:

$$\begin{aligned} u_x^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) &= u^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi_{1,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau); \\ u_\varphi^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) &= \left(1 + \frac{z_i}{R_i(x)}\right) v^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau) + z_i^2 \varphi_{2,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau); \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_z^{(i)}(x, \varphi, z_i, \tau) = w^{(i)}(x, \varphi, \tau), i = \{t, b\},$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, i=\{t,b\}$ – проєкції переміщень точок серединних поверхонь на координатні лінії (x, φ, z_i) ; $\varphi_{1,1}^{(i)}, \varphi_{2,1}^{(i)}, i=\{t,b\}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні; функції $\varphi_{1,2}^{(i)}, \varphi_{2,2}^{(i)}$ визначаються з граничних умов, які розглядаються далі; $R_b(x), R_t(x)$ – радіуси кривизни серединних поверхонь внутрішньої та зовнішньої обшивок:

$$R_b(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + 0.5 \frac{h_b}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + 0.5 h_b, & x \geq x_s; \end{cases}$$

$$R_t(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_b + h_c + 0.5 h_t}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5 h_t, & x \geq x_s; \end{cases}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{R}{x_s} \right).$$

Розкладення переміщень заповнювача представляються наступним чином:

$$u_x^{(c)}(x, \varphi, z_i, \tau) = u^{(c)} + z_c \varphi_{1,1}^{(c)} + z_c^2 \varphi_{1,2}^{(c)} + z_c^3 \varphi_{1,3}^{(c)}; \quad (4)$$

$$u_\varphi^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) = \left(1 + \frac{z_i}{R_c(x)} \right) v^{(c)} + z_c \varphi_{2,1}^{(c)} + z_c^2 \varphi_{2,2}^{(c)} + z_c^3 \varphi_{2,3}^{(c)};$$

$$u_z^{(c)}(x, \varphi, z_c, \tau) = w^{(c)} + z_c \varphi_{3,1}^{(c)} + z_c^2 \varphi_{3,2}^{(c)},$$

де $u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}$ – проєкції переміщень точок серединної поверхні заповнювача; $\varphi_{1,1}^{(c)}, \varphi_{2,1}^{(c)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні; функції $\varphi_{1,2}^{(c)}, \varphi_{2,2}^{(c)}, \varphi_{3,2}^{(c)}, \varphi_{1,3}^{(c)}, \varphi_{2,3}^{(c)}, \varphi_{3,1}^{(c)}$ визначаються з умов безперервності переміщень на границях шарів; радіус кривизни серединної поверхні шару задовольняє рівнянням:

$$R_c(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_b + 0.5 h_c}{\cos \alpha}, & x < x_s; \\ R + h_b + h_c + 0.5 h_t, & x \geq x_s. \end{cases}$$

Таким чином, напружено-деформований стан оболонки описується п'ятнадцятьма невідомими $u^{(i)}(x, \varphi, \tau), v^{(i)}(x, \varphi, \tau), w^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau), i = \{t, b, c\}$.

В цій статті розглядаються коливання з амплітудами, які значно менші ніж товщина оболонки. Тому зв'язок між переміщеннями та деформаціями шарів оболонки має вигляд [10]:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial}; \quad \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z_i};$$

$$\varepsilon_\varphi^{(i)} = \frac{1}{1 + \frac{z_i}{R_i(x)}} \left(\frac{1}{A_i(x)} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial} + \frac{dA_i(x)}{d} \frac{u_x^{(i)}}{A_i(x)} + \frac{u_z^{(i)}}{R_i(x)} \right);$$

$$\varepsilon_\varphi^{(i)} = \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_i}{R_i(x)} \right)} \left(\frac{1}{A_i(x)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial} - \frac{u_\varphi^{(i)}}{R_i(x)} \right); \quad \varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z_i} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_i}{R_i(x)}\right)} \left(\frac{1}{A_i(x)} \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial} - \frac{dA_i(x)}{d} \frac{u_\varphi^{(i)}}{A_i(x)} \right), i = t, c, b,$$

де $A_i; i = \{t, c, b\}$ – параметри Ляме серединних поверхонь шарів оболонки. Додаємо, що співвідношення для деформацій (5) виконуються для конічної та циліндричної частин конструкції (рис. 1).

Функції з розкладень (3) $\varphi_{1,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau), \varphi_{2,2}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$ визначаються з граничних умов:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) &= \sigma_\varphi^{(t)}\left(x, \varphi, \frac{h_t}{2}, \tau\right) = 0; \\ \sigma_x^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) &= \sigma_\varphi^{(b)}\left(x, \varphi, -\frac{h_b}{2}, \tau\right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Умови безперервності переміщень на границях шарів мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_i^{(t)}\left(x, \varphi, -\frac{h_t}{2}, \tau\right) &= u_i^{(c)}\left(x, \varphi, \frac{h_c}{2}, \tau\right), \\ u_i^{(b)}\left(x, \varphi, \frac{h_b}{2}, \tau\right) &= u_i^{(c)}\left(x, \varphi, -\frac{h_c}{2}, \tau\right), i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Підстановка (4) у вирази (7) дозволяє визначити функції $\varphi_{1,2}^{(c)}, \varphi_{1,3}^{(c)}, \varphi_{2,2}^{(c)}, \varphi_{2,3}^{(c)}, \varphi_{3,1}^{(c)}, \varphi_{3,2}^{(c)}$.

Співвідношення (3), (4) вводяться у (5) та збираються коефіцієнти при однакових степенях z_i . У результаті елементи тензора деформацій задовольняють наступним розкладенням:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(i)} &= \varepsilon_{x,0}^{(i)} + z_i k_{x,0}^{(i)} + z_i^2 k_{x,1}^{(i)} + z_i^3 k_{x,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_\varphi^{(i)} &= \varepsilon_{\varphi,0}^{(i)} + z_i k_{\varphi,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\varphi,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\varphi,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_x^{(i)} &= \varepsilon_{x,0}^{(i)} + z_i k_{x,0}^{(i)} + z_i^2 k_{x,1}^{(i)} + z_i^3 k_{x,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_x^{(i)} &= \varepsilon_{x,0}^{(i)} + z_i k_{x,0}^{(i)} + z_i^2 k_{x,1}^{(i)} + z_i^3 k_{x,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_\varphi^{(i)} &= \varepsilon_{\varphi,0}^{(i)} + z_i k_{\varphi,0}^{(i)} + z_i^2 k_{\varphi,1}^{(i)} + z_i^3 k_{\varphi,2}^{(i)}; \\ i &= \{t, b, c\}; \\ \varepsilon_z^{(c)} &= \varepsilon_{z,0}^{(c)} + z_c k_{z,0}^{(c)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Елементи розкладень (8) залежать від геометричних параметрів оболонки та складових розкладень (3), (4).

Кінетична енергія оболонки дорівнює сумі кінетичних енергій її шарів:

$$T = 0.5 \sum_{i=t,c,b} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i \left[\dot{u}_x^{(i)2} + \dot{u}_\varphi^{(i)2} + \dot{u}_z^{(i)2} \right] \left(1 + \frac{z_i}{R_i} \right) A_i dz_i d\varphi dx, \quad (9)$$

де $\dot{u}_x^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial t}$; ρ_i – густина матеріалу шару. Потенційна енергія оболонки складається з потенційних енергій шарів:

$$\Pi = \sum_{i=t,b,c} \Pi^{(i)},$$

де

$$\begin{aligned} \Pi^{(c)} = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h_c}^{0.5h_c} & \left(\sigma_x^{(c)} \varepsilon_x^{(c)} + \sigma_\varphi^{(c)} \varepsilon_\varphi^{(c)} + \sigma_z^{(c)} \varepsilon_z^{(c)} + 2\sigma_x^{(c)} \varepsilon_x^{(c)} + 2\sigma_\varphi^{(c)} \varepsilon_\varphi^{(c)} \right. \\ & \left. + 2\sigma_x^{(c)} \varepsilon_x^{(c)} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_c} \right) A_c dz_c d\varphi dx; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h_i}^{0.5h_i} & \left(\sigma_x^{(i)} \varepsilon_x^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)} \varepsilon_\varphi^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)} \varepsilon_\varphi^{(i)} + \sigma_x^{(i)} \varepsilon_x^{(i)} + \sigma_x^{(i)} \varepsilon_x^{(i)} \right) \left(1 \right. \\ & \left. + \frac{z_i}{R_i} \right) A_i dz_i d\varphi dx, i = \{t, b\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Підкреслимо, що в потенційній енергії стільникового заповнювача враховується його поперечне стискання. У потенційних енергіях обшивок таке деформування не враховується, оскільки їх поперечна жорсткість значно більша поперечної жорсткості заповнювача.

Вирази (9), (11) є складними та об'ємними як внаслідок кускової природи підінтегральних виразів, так і внаслідок доволі складної геометрії оболонки. Тому для отримання їх в аналітичному вигляді було застосовано систему комп'ютерної алгебри Maple 2021. Підінтегральні функції при цьому є поліномами відносно z_i $i = \{t, b, c\}$, тому інтегрування за цими змінними може бути проведено аналітично. Обчислення інтегралів (9)–(11) доцільно проводити, розділюючи інтервал інтегрування на два підінтервали $0 \leq x < x_s$ та $L \geq x \geq x_s$.

Оболонка є затисненою на кінці $x = L$. Граничні умови мають вигляд:

$$u^{(i)}|_{x=L} = v^{(i)}|_{x=L} = w^{(i)}|_{x=L} = \varphi_{1,1}^{(i)}|_{x=L} = \varphi_{2,1}^{(i)}|_{x=L} = 0; i = \{t, c, b\}. \quad (12)$$

На лінії $x = x_s$ переміщення точок оболонки повинні задовольняти умовам безперервності [3]:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \cos \alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \sin \alpha; \\ w^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= -u^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \sin \alpha + w^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t) \cos \alpha; \\ v^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= v^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \\ \varphi_{1,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) \cos \alpha &= \varphi_{1,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \\ \varphi_{2,1}^{(i)}(x_s - 0, \varphi, t) &= \varphi_{2,1}^{(i)}(x_s + 0, \varphi, t); \\ i &= \{t, b, c\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Лінійні коливання складеної тонкостінної конструкції. Для аналізу вільних лінійних коливань оболонки застосуємо метод Релея–Рітца [10]. Представимо функції $u^{(i)}(x, \varphi, t)$, $v^{(i)}(x, \varphi, t)$, $w^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, t)$, $i = \{t, b, c\}$ у такій формі:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x, \varphi, t) &= \tilde{u}^{(i)}(x) \cos(n \varphi) \cos(\omega t); v^{(i)}(x, \varphi, t) = \tilde{v}^{(i)}(x) \sin(n \varphi) \cos(\omega t); \\ w^{(i)}(x, \varphi, t) &= \tilde{w}^{(i)}(x) \cos(n \varphi) \cos(\omega t); \varphi_{1,1}^{(i)} = \tilde{\varphi}_{1,1}^{(i)}(x) \cos(n \varphi) \cos(\omega t); \\ \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, t) &= \tilde{\varphi}_{2,1}^{(i)}(x) \sin(n \varphi) \cos(\omega t); i = \{t, b, c\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де n – кількість колових хвиль; ω – власна частота коливань оболонки. Функції $\tilde{u}^{(i)}(x), \tilde{v}^{(i)}(x), \tilde{w}^{(i)}(x), \tilde{\varphi}_{1,1}^{(i)}(x), \tilde{\varphi}_{2,1}^{(i)}(x)$ обираються для виконання умов безперервності (14) таким чином:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(i)}(x) &= \begin{cases} U^{(i)}(x)\cos\alpha + W^{(i)}(x)\sin\alpha; & x < x_s; \\ U^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases} \\ \tilde{w}^{(i)}(x) &= \begin{cases} -U^{(i)}(x)\sin\alpha + W^{(i)}(x)\cos\alpha; & x < x_s; \\ W^{(i)}(x); & x \geq x_s; \end{cases} \\ \tilde{v}^{(i)}(x) &= V^{(i)}(x); \quad \tilde{\varphi}_{1,1}^{(i)}(x) = X^{(i)}(x); \\ \tilde{\varphi}_{2,1}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \Phi^{(i)}(x); & x < x_s; \\ \Phi^{(i)}(x)\cos\alpha; & x \geq x_s; \end{cases} \\ i &= \{t, b, c\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Невідомі функції $U^{(i)}(x), W^{(i)}(x), V^{(i)}(x), X^{(i)}(x), \Phi^{(i)}(x)$ розкладаються за базисними функціями таким чином:

$$\begin{aligned}U^{(j)}(x) &= \sum_{i=1}^{N_U} A_i^{(j)} P_i^{(U)}(x); \quad V^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{N_V} A_{i+N_U}^{(j)} P_i^{(V)}(x); \\ W^{(j)}(x) &= \sum_{i=1}^{N_W} A_{i+N_U+N_V}^{(j)} P_i^{(W)}(x); \quad X^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{N_X} A_{i+N_U+N_V+N_W}^{(j)} P_i^{(X)}(x); \\ \Phi^{(j)}(x) &= \sum_{i=1}^{N_\Phi} A_{i+N_U+N_V+N_W+N_X}^{(j)} P_i^{(\Phi)}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

де базисні функції $P_i^{(U)}(x), \dots, P_i^{(\Phi)}(x)$ задовольняють граничним умовам (12); $N_\Sigma = 3N_U + 3N_V + 3N_W + 3N_X + 3N_\Phi$; $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_{N_\Sigma}]$ – невідомі коефіцієнти розкладень.

Для дослідження вільних лінійних коливань оболонки методом Релея–Рітца [28] мінімізується інтеграл дії: $\int_0^{2\pi/\omega} (\mathcal{T} - \Pi) d\tau \rightarrow m$. Розкладення (16) підставляються у вирази (9)–(11). Після проведення інтегрування вирази для $\mathcal{T}, \Pi$ набувають такої форми:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \omega^2 \sin^2(\omega) \tilde{\mathcal{T}}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}); \\ \Pi &= \cos^2(\omega) \tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}),\end{aligned}$$

де $\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\Pi}$ – квадратичні форми відносно елементів вектора $\mathbf{A}$. Задача мінімізації інтеграла дії зводиться до мінімізації квадратичної форми:

$$\frac{\pi}{\omega} [\omega^2 \tilde{\mathcal{T}}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma}) - \tilde{\Pi}(A_1, \dots, A_{N_\Sigma})] \rightarrow m.$$

Мінімум функціонала досягається на розв’язку задачі про власні значення, з якої знаходяться частоти та форми коливань.

5. Рівняння рухів відносно узагальнених координат. Для побудови рівнянь коливань оболонки під дією надзвукового газового потоку застосовується метод заданих форм [11]. Представимо змінні задачі

$u^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $v^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $w^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \varphi, \tau)$, $i = \{t, b, c\}$ у вигляді розкладень за власними формами коливань:

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[q_{2i-1}^{(j)}(\tau) \cos(n) + q_{2i}^{(j)}(\tau) \sin(n) \right] W_i^{(j)}(x); \\ u^{(j)} &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[q_{2i-1+2N_f}^{(j)}(\tau) \cos(n) + q_{2i+2N_f}^{(j)}(\tau) \sin(n) \right] U_i^{(j)}(x); \\ v^{(j)} &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[q_{2i-1+4N_f}^{(j)}(\tau) \cos(n) + q_{2i+4N_f}^{(j)}(\tau) \sin(n) \right] V_i^{(j)}(x); \\ \varphi_{1,1}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[q_{2i-1+6N_f}^{(j)}(\tau) \cos(n) + q_{2i+6N_f}^{(j)}(\tau) \sin(n) \right] \Phi_i^{(j)}(x); \\ \varphi_{2,1}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[q_{2i-1+8N_f}^{(j)}(\tau) \cos(n) + q_{2i+8N_f}^{(j)}(\tau) \sin(n) \right] \Psi_i^{(j)}(x); \\ j &= t, c, b. \end{aligned} \quad (17)$$

де $\mathbf{q} = [q_i^{(j)}(\tau), j = t, c, b; i = 1 \dots 10N_f]^T$ – вектор узагальнених координат конструкції; $U_j^{(i)}(x)$, $V_j^{(i)}(x)$, $W_j^{(i)}(x)$, $\Phi_j^{(i)}(x)$, $\Psi_j^{(i)}(x)$, $i = \{t, c, b\}$, $j = 1 \dots N_f$ – власні форми коливань оболонки. Співвідношення (17) описують колові хвилі в складеній тонкостінній конструкції.

Підстановка розкладень (17) у вирази для потенційної та кінетичної енергії (9)–(11) дозволяє представити їх як квадратичні форми узагальнених координат: $\Pi = \Pi(q_1^{(t)}, \dots, q_{10N_f}^{(b)})$; $T = T(q_1^{(t)}, \dots, q_{10N_f}^{(b)})$.

При дослідженні динаміки оболонки під дією надзвукового потоку застосовується поршнева теорія [12]:

$$\begin{aligned} p &= - \frac{\gamma p_\infty M_\parallel^2}{\sqrt{M_\parallel^2 - 1}} \left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \cos \beta + \frac{1}{A_t} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \sin \beta + \frac{M_\parallel^2 - 2}{M_\parallel a_\infty (M_\parallel^2 - 1)} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \right. \\ &\quad \left. - \frac{w^{(t)}}{2A_t \sqrt{M_\parallel^2 - 1}} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

де p – тиск газу; γ – адіабатична експонента; p_∞ – статичний тиск вільного потоку; $M_\parallel$ – число Маха; a_∞ – швидкість звуку вільного потоку; β – кут атаки. Віртуальна робота тиску (20) має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= - \frac{\gamma p_\infty M_\parallel^2}{\sqrt{M_\parallel^2 - 1}} \int_{x_0}^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \cos \beta + \frac{1}{A_t} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \sin \beta + \frac{M_\parallel^2 - 2}{M_\parallel a_\infty (M_\parallel^2 - 1)} \frac{\partial w^{(t)}}{\partial} \right. \\ &\quad \left. - \frac{w^{(t)}}{2A_t \sqrt{M_\parallel^2 - 1}} \right) \delta w^{(t)} A_t d\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

де δ – символ варіації. Узагальнена сила аеродинамічного тиску у векторному вигляді $\mathbf{F}$ має таку матричну форму:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{H}\mathbf{q} \quad (20)$$

де $\mathbf{F}$ – вектор розмірності $30N_f$; $\mathbf{A}$ – матриця аеродинамічної жорсткості; $\mathbf{H}$ – матриця аеродинамічного демпфування.

Рух оболонки опишемо рівняннями Лагранжа. У матричній формі ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \bar{\mathbf{M}}_1 \\ \bar{\mathbf{M}}_2 & \bar{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & \bar{\mathbf{K}}_1 \\ \bar{\mathbf{K}}_2 & \bar{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q}_1 + \mathbf{H}\mathbf{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

де $\bar{\mathbf{M}}_1, \bar{\mathbf{M}}_1, \bar{\mathbf{M}}_2, \bar{\mathbf{M}}_2$ – матриці мас; $\bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_2, \bar{\mathbf{K}}_2$ – матриці жорсткості конструкції; $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ – вектори узагальнених координат. Матриця мас є погано обумовленою, що пояснюється малими значеннями мас шарів обшивок. Ці малі значення об'єднаємо у дві матриці та припустимо, що вони нульові: $\bar{\mathbf{M}}_2 = 0$; $\bar{\mathbf{M}}_2 = 0$. Тоді з (21) випливає наступне матричне рівняння:

$$\mathbf{q}_2 = -\bar{\mathbf{K}}_2^{-1} \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{q}_1.$$

Це співвідношення підставляється в перше матричне диференціальне рівняння (21). У результаті отримаємо наступне матричне диференціальне рівняння:

$$\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_2) \mathbf{q}_1 = \mathbf{A}\mathbf{q}_1 + \mathbf{H}\mathbf{q}_1. \quad (22)$$

Дослідимо явище втрати динамічної стійкості складеною конструкцією, рух якої описується рівняннями (22). Для цього проаналізуємо втрату стійкості тривіального стану рівноваги. Запишемо систему рівнянь (22) відносно фазових координат ($\mathbf{q}_1, \mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}_1$).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}_1^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) & \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

де $\mathbf{C} = (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_2)$; $\mathbf{E}$ – одинична матриця. Для аналізу стійкості тривіального положення рівноваги системи (23) її розв'язок представляється у формі:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} e^{\lambda t},$$

де λ – характеристичний показник, який знаходиться з проблеми власних значень:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}_1^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) & \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{E} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця. Знак дійсної частини показника λ визначає стійкість положення рівноваги.

Таким чином, описано метод аналізу динамічної стійкості положення рівноваги складеної конструкції під дією надзвукового газового потоку.

6. Чисельні розрахунки. Розглянемо складену оболонку (рис. 1) з наступними геометричними параметрами:

$$R = 0,5 \text{ м}; h_t = h_b = 2 \text{ мм}; h_c = 10 \text{ мм}; L = 5,062 \text{ м}; x_s = 2,062 \text{ м}; \alpha = 14.03^\circ.$$

Обшивки оболонки виготовлено з вуглепластику на базі SIGRAPREG C U200-0/NF-E310/30% з кутами укладення шарів 0/90°/0/90°. Механічні властивості цього матеріалу такі:

$$E_x = 160 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_\varphi = 6,8 \cdot 10^9 \text{ Па}; \nu_x = 0,32; \nu_\varphi = 0,0136;$$

$$G_x = 800 \cdot 10^9 \text{ Па}; G_\varphi = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}; \rho_t = \rho_b = 1400 \text{ КГ/М}^3.$$

Середній шар товщиною 10 мм складається із стільникового заповнювача, комірка якого наведена на рис. 1. Комірка заповнювача має такі розміри: $l_1 = 6,1054 \text{ мм}; l_2 = 3,0527 \text{ мм}; \theta = 60^\circ; h_1 = h_2 = 0,4 \text{ мм}$. Заповнювач надруковано адитивною технологією FDM із матеріалу ULTEM 9085. Його гомогенізовані механічні характеристики дорівнюють:

$$E_x = 2,91 \text{ МПа}; E_\varphi = 2,91 \text{ МПа}; E_z = 215,10 \text{ МПа}; \nu_x = 0,972;$$

$$\nu_\varphi = 0,0051; \nu_x = 0,0042; G_x = 1,118 \text{ МПа}; G_\varphi = 39,1 \text{ МПа}; G_x = 39,1 \text{ МПа}; \rho_c = 253,189 \text{ КГ/М}^3.$$

Було проведено аналіз вільних коливань оболонки, отримано її власні частоти та форми коливань. З метою контролю адекватності моделі було проведено порівняння із скінченно-елементним аналізом власних коливань оболонки, отриманим у системі ANSYS.

Аналіз власних коливань проводився при $N_U = N_V = N_W = N_X = N_\Phi = N$ для значень $N = 10, N = 15, N = 20$. У табл. 1 наведено результати порівняння власних частот, які отримано за допомогою скінченно-елементного аналізу та методом Релея–Рітца. В цій таблиці наводяться результати розрахунків з різним числом базисних функцій, отриманих методом Релея–Рітца в залежності від числа хвиль у коловому напрямку. Крім того, наводяться результати розрахунків частот у програмному комплексі ANSYS та відносна похибка отриманих результатів.

Таблиця 1. Результати порівняння власних частот (Гц)

n	ANSYS	$N = 10$	Відносна похибка	$N = 15$	Відносна похибка	$N = 20$	Відносна похибка
2	85,84	93,25	0,086	90,42	0,053	88,84	0,035
3	121,49	125,71	0,035	124,22	0,022	123,26	0,015
2	145,65	158,37	0,087	153,43	0,053	151,22	0,038
3	171,07	191,86	0,121	180,63	0,056	178,03	0,041
4	198,1	200,23	0,011	199,41	0,007	199,01	0,005
4	217,94	230,29	0,057	223,66	0,026	221,92	0,018
2	219,55	246,69	0,124	231,96	0,057	228,76	0,042
3	223,38	250,29	0,120	237,31	0,062	232,94	0,043

З табл. 1 випливає, що при збільшенні кількості базисних функцій N власні частоти наближаються до обчислених методом скінченних елементів, що свідчить про збіжність результатів, отриманих методом Релея–Рітца. Застосування $N = 20$ дозволяє обмежити похибку визначення власної частоти на рівні 5 %, тому доцільно використовувати саме цей базис.

Було проведено аналіз динамічної стійкості описаної вище оболонки під дією надзвукового потоку при різних його параметрах. Розглядався діапазон значень чисел Маха від 2 до 4,5. Кут атаки приймав значення $12^\circ, 6^\circ, 0^\circ$. Значення числа хвиль в коловому напрямку n приймалося від 2 до 15. Кількість форм в розкладеннях (17) приймалося $N_f = 2$. Для побудови розкладень (16) застосовано власні форми коливань оболонки, отримані з числом доданків $N = 20$.

Досліджувалося значення критичного тиску, при якому оболонка втрачає стійкість тривіального положення рівноваги, для різних значень M_0 та n при куті атаки $\beta = 12^\circ$. Це трапляється при значеннях $p_\infty > p_{\text{крит}}$. Значення $p_{\text{крит}}$ описують межу між стійкими та нестійкими рухами. На рис. 2 наведено залежність $p_{\text{крит}}(M_0)$ для $n = \{2, 3, 4, 5\}$. Видно, що при низьких значеннях M_0 мінімальне значення критичного тиску спостерігається при $n = 3$. З підвищенням швидкості потоку мінімальне значення критичного тиску спостерігається при $n = 4$ та $n = 5$.

Досліджувалося значення критичного тиску, при якому оболонка втрачає стійкість тривіального положення рівноваги, для різних значень M_0 та n при куті атаки $\beta = 6^\circ$. На рис. 3 наведено залежність критичного тиску від числа Маха $p_{\text{крит}}(M_0)$ для $n = \{2, 3, 4\}$. Видно, що при низьких значеннях M_0 мінімальний критичний тиск спостерігається при $n = 2$. З підвищенням швидкості потоку мінімальний критичний тиск спостерігається при $n = 3$ та $n = 4$.

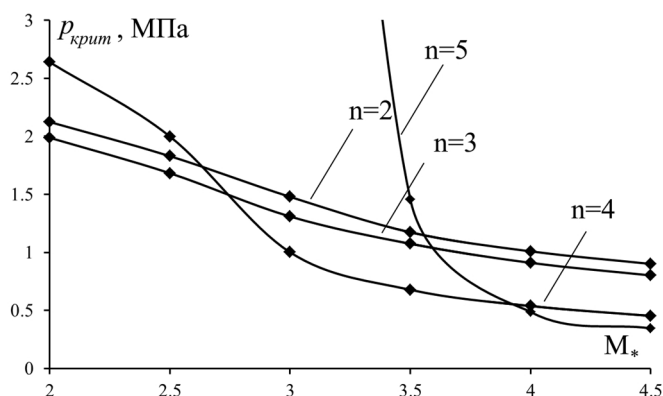


Рис. 2 – Залежність критичного тиску від числа Маха $p_{\text{крит}}(M_0)$ при $\beta = 12^\circ$

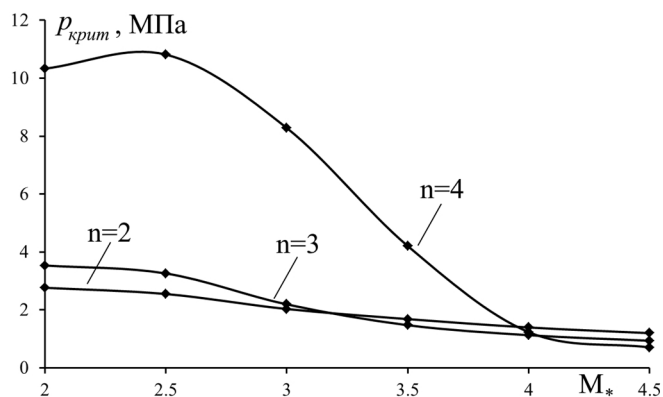


Рис. 3 – Залежність критичного тиску від числа Маха $p_{\text{крит}}(M_0)$ при $\beta = 6^\circ$

Проводився розрахунок критичного тиску при куті атаки $\beta = 0^\circ$. Із результатів розрахунків випливає, що при $M_0 \in [2; 4.5]$ мінімальний критичний тиск реалізується при $n = 2$.

На рис. 4 наведено порівняння критичного тиску потоку для різних кутів атаки. Видно, що із збільшенням кута атаки критичний тиск знижується.

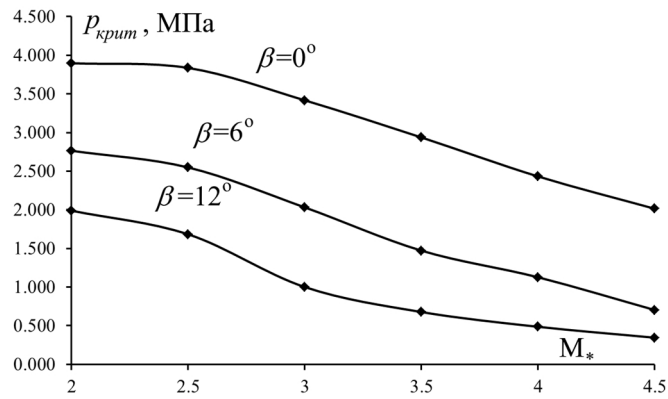


Рис. 4 – Зв'язок між критичним тиском, кутом атаки та числом Маха

Висновки. Отримано лінійну динамічну модель втрати стійкості складеної тришарової тонкостінної композитної конструкції, яка взаємодіє з надзвуковим газовим потоком. Тонкостінна конструкція складається з тришарової конічної та циліндричної оболонок. Середнім шаром конструкції є стільниковий заповнювач, який виготовлений за допомогою адитивних технологій FDM з матеріалу ULTEM, а обшивки виготовлено з вуглепластику.

Для дослідження вільних лінійних коливань тонкостінної складеної конструкції застосовується напіваналітичний метод Релея–Рітца, який використовує кінетичну та потенційну енергії конструкцій. Результати аналізу вільних коливань застосовуються для отримання моделі динамічної нестійкості складеної тришарової оболонки при її взаємодії з надзвуковим газовим потоком. При аналізі динамічної нестійкості аналізуються колові хвилі в тонкостінній конструкції. Рівняння динамічної поведінки конструкції має вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат тонкостінної конструкції. Для розрахунків меж динамічної нестійкості використовуються характеристичні показники.

При куті атаки 12° та низьких значеннях чисел Маха мінімальне значення критичного тиску спостерігається при трьох колових хвилях, а при підвищенні швидкості потоку мінімальне значення критичного тиску спостерігається при чотирьох та п'яти колових хвилях.

При куті атаки 6° при низьких значеннях чисел Маха мінімальний критичний тиск спостерігається при двох колових хвилях. З підвищенням швидкості потоку мінімальний критичний тиск спостерігається при трьох та чотирьох колових хвилях.

Втрата динамічної стійкості відбувалася на формах з невеликим числом колових хвиль $2 \div 5$. Цей висновок істотно відрізняється від результатів аналізу динамічної нестійкості ізотропної циліндричної оболонки, в якій мінімальне значення тиску спостерігається при $10 \div 12$ колових хвилях.

З підвищенням швидкості потоку збуджувались форми з більшою кількістю хвиль у коловому напрямку. Збільшення кута атаки надзвукового потоку призводить до зменшення критичного тиску.

Результати цієї роботи отримані за проектом номер 2023.04/0001, що фінансується Національним фондом досліджень України.

1. Zarei M., Rahimi G. H. Buckling resistance of joined composite sandwich conical–cylindrical shells with lattice core under lateral pressure. *Thin-Walled Struct.* 2022. Vol. 174. 109027. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109027>
2. Avramov K., Myrzaliyev D., Uspensky B., Sakhno N., Seitkazenova K. K. Buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite joined spherical-cylindrical-spherical thin-walled structure. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C. J. Mech. Eng. Sci.* 2021. Vol. 235(22). Pp. 6287–6310. <https://doi.org/10.1177/09544062211005795>
3. Uspensky B., Avramov K., Nikonov O., Sakhno N. Dynamic instability of functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite joined conical-cylindrical shell in supersonic flow. *Int. J. Struct. Stability and Dyn.* 2022. Vol. 22. No. 7. P. 2250039. <https://doi.org/10.1142/S0219455422500390>
4. Sobhani E., Masoodi A. R., Ahmadi-Pari A. R. Vibration of FG-CNT and FG-GNP sandwich composite coupled Conical-Cylindrical-Conical shell. *Comp. Struct.* 2021. Vol. 273. 114281. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114281>
5. Fu T., Wu X., Xiao Z., Chen Z., Li B. Analysis of vibration characteristics of FGM sandwich joined conical–conical shells surrounded by elastic foundations. *Thin-Walled Struct.* 2021. Vol. 165. P. 107979. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107979>
6. Zuo P., Shi X., Ge R., Luo J. Unified series solution for thermal vibration analysis of composite laminated joined conical-cylindrical shell with general boundary conditions. *Thin-Walled Struct.* 2022. Vol. 178. 109525. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109525>
7. Li J., Li H., Yang Y., Fang Y., Wang H., Wang X., Zhang H., Wang H., Cao H., Hou J., Sun G., Du D., Liu X., Xu Z., Sun W., Luo Z., Han Q. Vibration behaviours of composite conical–cylindrical shells with damping coating: Theory and experiment. *Thin-Walled Struct.* 2024. Vol. 203. 112218. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112218>
8. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Comp. Struct.* 2014. Vol. 118. Pp. 664–676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057>
9. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Sol. and Struct.* 1984. Vol. 20. Pp. 881–896. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8)
10. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials.* Cambridge: Cambridge University Press, 2018. <https://doi.org/10.1017/9781316422892>
11. Meirovitch L. *Fundamentals of Vibrations.* New York: Mc Graw Hill, 1970. 20 pp.
12. Avramov K., Uspensky B. Nonlinear supersonic flutter of sandwich truncated conical shell with flexible honeycomb core manufactured by fused deposition modeling. *Int. J. Non-lin. mech.* 2022. Vol. 143. 104039. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104039>

Отримано .2024