

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Цель работы – определение зависимости показателей, характеризующих погрешность компенсации постоянного и линейно возрастающего возмущающего воздействия, от коэффициентов уравнений движения, параметров исполнительного и корректирующего устройств с учетом обеспечения заданного запаса устойчивости. Зависимости получены аналитическими методами с использованием известных положений теории автоматического управления.

В результате работы впервые установлена связь векторов коэффициентов ошибок с параметрами системы стабилизации плоского вращательного движения «твердой» ракеты в виде обзримых аналитических выражений. Получены новые соотношения для построения границы области устойчивости на плоскости двух коэффициентов закона регулирования.

Материалы статьи могут быть применены при разработке системы стабилизации, так как устанавливают связь между ее параметрами и ошибками компенсации возмущений, а также дают начальное приближение для расчетов по более точным моделям численными методами.

Мета роботи – визначення залежності показників, які характеризують похибку компенсації постійного та лінійно зростаючого збурення, від коефіцієнтів рівнянь руху, параметрів виконавчого і корегувального пристроїв з врахуванням заданого запаса стійкості. Залежності отримані аналітичними методами з використанням відомих положень теорії автоматичного керування.

В результаті роботи вперше встановлено зв'язок векторів коефіцієнтів помилок з параметрами системи стабілізації плоского обертального руху «твердої» ракети через доступні для огляду аналітичні вирази. Отримані нові співвідношення для побудови границі області стійкості на площині двох коефіцієнтів закону регулювання.

Матеріали статті можуть бути використані при розробці системи стабілізації, оскільки встановлюють зв'язок між її параметрами та помилками компенсації збурень, а також дають початкове наближення для розрахунків за більш точними моделями чисельними методами.

The research goal is to determine dependencies of errors factors for compensating a constant and ramp excitation on coefficients of motion equations, parameters of actuating and correcting devices considering a given stability margin. Dependencies are derived by analytic methods using known concepts of the automatic control theory. Vectors of error coefficients have been first linked to parameters of the stabilization system of a plane rotation of a "solid" rocket in the form of analytic expressions. New relations for building a bond of the stability region on planes of two coefficients of the control action.

The paper results can be used for developing the stabilization system due to linking between its parameters and compensation errors and provide an initial approximation for calculations on more accurate models using numerical methods.

Проектирование системы стабилизации ракеты космического назначения (РКН) начинается с исследования устойчивости ее вращательного движения как твердого тела при постоянных коэффициентах уравнений движения в окрестности выбранных точек траектории с использованием предположения об отсутствии взаимосвязи между движениями в различных плоскостях и без учета канала стабилизации центра масс [1].

Определено расположение областей устойчивости на плоскости коэффициентов закона регулирования в зависимости от параметров РКН, исполнительного устройства и траектории; для исследования динамических характеристик РКН как объекта управления разработаны методики применения аппарата передаточных функций, частотных характеристик и корневого годографа [1 – 4]. Описаны особенности использования цифровой машины в системе стабилизации, и разработаны алгоритмы ее синтеза с учетом квантования сигналов и дискретизации во времени [5].

С целью ограничения аэродинамических сил при прохождении атмосферного участка траектории рассмотрен способ стабилизации вращательного движения РКН, в котором вместо традиционного закона регулирования по отклонениям углов и угловых скоростей рыскания и тангажа используется

© В.В. Авдеев, 2014

регулирование по углам атаки и скольжения [6], что нашло применение в ракетах «Ариан», «Энергия» и «Зенит». Рост возможностей бортовых вычислительных машин позволяет с целью улучшения динамических характеристик системы стабилизации усложнить закон регулирования. Показано [7], что введение в традиционный закон регулирования – зависимость угла поворота руля  $\delta$  от угла рыскания  $\psi$  и его производной по времени  $\dot{\psi}$

$$\delta = k_{\psi} \cdot \psi + k'_{\psi} \cdot \dot{\psi}, \quad (1)$$

слагаемого, пропорционального угловому ускорению рыскания  $\ddot{\psi}$ , увеличивает размеры области устойчивости на плоскости коэффициентов  $k_{\psi}$   $k'_{\psi}$  и, как следствие, дает возможность при сохранении заданного запаса устойчивости уменьшить статическую погрешность системы стабилизации и улучшить ее быстродействие.

Для определения характеристик системы стабилизации в зависимости от параметров корректирующего и исполнительного устройств на начальном этапе проектирования в данной работе ставится задача установления зависимости коэффициентов ошибок стабилизации плоского вращательного движения РКН при компенсации постоянного и линейно возрастающего возмущающего воздействий от коэффициентов уравнений движения, закона регулирования и параметров исполнительного органа.

Уравнения возмущенного движения системы стабилизации вращательного движения РКН в плоскости рыскания [2, 7] с учетом инерции исполнительного устройства – автомата стабилизации (АС), введения в левую часть закона регулирования (1) слагаемого, пропорционального угловой скорости поворота руля –  $k'_{\delta} \dot{\delta}$ , а в правую – слагаемого, пропорционального угловому ускорению рыскания –  $k''_{\psi} \ddot{\psi}$ , можно представить в виде

$$\dot{x} = A \cdot x + C \cdot m, \quad (2)$$

$$\text{где } x = [\psi \ \dot{\psi} \ \delta \ \dot{\delta} \ \ddot{\delta}]^T; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\psi\psi} & a'_{\psi\psi} & a_{\psi\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ v \cdot k''_{\psi}]^T;$$

$m$  – зависящее от времени возмущающее угловое ускорение;  $a_{\psi\psi}$ ,  $a'_{\psi\psi}$ ,  $a_{\psi\delta}$  – коэффициенты, зависящие от параметров РКН и траектории;  $v = 1/(k'_{\delta} \cdot T_{AC}^2)$ ;

$a_{51} = v \cdot (k_{\psi} + k''_{\psi} \cdot a_{\psi\psi})$ ;  $a_{52} = v \cdot (k'_{\psi} + k''_{\psi} \cdot a'_{\psi\psi})$ ;  $a_{53} = v \cdot (k''_{\psi} \cdot a_{\psi\delta} - 1)$ ;  $a_{54} = -v \cdot (k'_{\delta} + \xi \cdot T_{AC})$ ;  $a_{55} = -v \cdot T_{AC} \cdot (\xi \cdot k'_{\delta} + T_{AC})$ ;  $k_{\psi}$ ,  $k'_{\psi}$ ,  $k''_{\psi}$ ,  $k'_{\delta}$  – коэффициенты закона регулирования (1) с введенными двумя слагаемыми;  $\xi$ ,  $T_{AC}$  – коэффициент демпфирования и постоянная времени АС.

Входящее в (2) зависящее от времени  $t$  кусочно-линейное возмущающее воздействие принято в виде

$$m(t) = m_0 + \dot{m}_0 \cdot t, \quad (3)$$

поэтому подлежат определению только два вектора коэффициентов ошибок:

$$ER_0 = -A^{-1} \cdot C \text{ и } ER_1 = -A^{-2} \cdot C. \quad (4)$$

Система уравнений относительно элементов матрицы  $A^{-1}$  распадается на независимые подсистемы из двух линейных уравнений относительно элементов  $\mu_{ij}$  матрицы  $A^{-1}$ , решение которых приводит к обозримым аналитическим выражениям. После несложных преобразований первый вектор коэффициентов ошибок (4) определяется выражением:

$$ER_0 = \frac{1}{k_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a_{\psi\psi}} \cdot [-1 \ 0 \ -k_\psi \ 0 \ 0]^T. \quad (5)$$

Входящий в (5) коэффициент  $a_{\psi\psi}$  уравнений возмущенного движения (2) зависит от скоростного напора, при выходе РКН из атмосферного участка траектории он уменьшается до нуля; коэффициент  $a_{\psi\delta}$  определяется градиентом рулевого усилия АС и расположением точки его приложения на оси РКН. Первая координата вектора коэффициентов ошибок  $ER_0$  (5) согласуется с известным положением, что статическая погрешность стабилизации угла рыскания  $\psi = x_1$  при постоянном возмущающем ускорении в первом приближении обратно пропорциональна коэффициенту закона регулирования  $k_\psi$ . В соответствии с третьей координатой вектора  $ER_0$  отклонение руля  $x_3 = \delta$  после окончания переходного процесса обратно пропорционально коэффициенту  $a_{\psi\delta}$  уравнений движения (2).

Согласно (2, 4)  $i$ -я координата вектора коэффициентов ошибок  $ER_1$ , выраженная через элементы  $v_{ij}$  матрицы  $A^{-2}$ , может быть записана в виде:

$$ER_{1i} = -(v_{i2} + v \cdot k_\psi'' \cdot v_{i5}), \quad i = \overline{1, 5}, \quad (6)$$

где  $v_{12} = \mu_{11} \cdot \mu_{12} + \mu_{13} \cdot \mu_{32}$ ;  $v_{22} = \mu_{12}$ ;  $v_{32} = \mu_{31} \cdot \mu_{12} + \mu_{33} \cdot \mu_{32}$ ;

$v_{42} = \mu_{32}$ ;  $v_{52} = 0$ ;  $v_{15} = \mu_{11} \cdot \mu_{15} + \mu_{13} \cdot \mu_{35}$ ;  $v_{25} = \mu_{15}$ ;

$v_{35} = \mu_{31} \cdot \mu_{15} + \mu_{33} \cdot \mu_{35}$ ;  $v_{45} = \mu_{35}$ ;  $v_{55} = 0$ .

С учетом (2), (6) после несложных преобразований можно установить зависимость координат вектора  $ER_1$  (4) от коэффициентов закона регулирования ( $k_\psi, k_\psi', k_\delta'$ ), уравнений возмущенного движения РКН ( $a_{\psi\psi}, a_{\psi\delta}, a_{\psi\psi}'$ ) и АС ( $\xi, T_{AC}$ ):

$$ER_1 = \begin{bmatrix} [-k_\psi \cdot a_{\psi\delta}(k'_\delta + \xi \cdot T_{AC}) + k'_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a'_{\psi\psi}] / (k_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a_{\psi\psi})^2 \\ -1 / (k_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a_{\psi\psi}) \\ [k_\psi \cdot (a'_{\psi\psi} + a_{\psi\psi} \cdot k'_\delta + \xi \cdot T_{AC}) - k'_\psi \cdot a_{\psi\psi}] / (k_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a_{\psi\psi})^2 \\ -k'_\psi / (k_\psi \cdot a_{\psi\delta} + a_{\psi\psi}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Из теории регулирования известно, и это подтверждается численным интегрированием уравнений (2), что для случая возмущающего воздействия вида (3) векторы коэффициентов ошибок  $ER_0$  и  $ER_1$  определяют вектор  $x_k$  состояния системы после окончания переходного процесса, то есть

$$x_k = \dot{m}_0 \cdot (ER_0 \cdot t + ER_1) + ER_0 \cdot m_0. \quad (8)$$

При условии устойчивости системы стабилизации векторы  $ER_0$  и  $ER_1$  (5), (7) и соотношение (8) дают возможность определить зависимость установившихся значений углов рыскания и поворота руля, а также соответствующих угловых скоростей от названных выше параметров.

Следуя монографии [2], расположение области устойчивости рассматривается на плоскости коэффициентов закона регулирования  $k_\psi, k'_\psi$ . Оно определяется коэффициентами характеристического полинома матрицы  $A$  (2)

$$Q(s) = q_1 + q_2s + q_3s^2 + q_4s^3 + q_5s^4 + k'_\delta T_{AC}^2 \cdot s^5, \quad (9)$$

где  $q_1 = -k_\psi \cdot a_{\psi\delta} - a_{\psi\psi}$ ,  $q_2 = -k'_\psi \cdot a_{\psi\delta} - a_{\psi\psi} \cdot a_2 - a'_{\psi\psi}$ ,

$$q_3 = 1 - k''_\psi \cdot a_{\psi\delta} - a'_{\psi\psi} \cdot a_2 - a_{\psi\psi} \cdot a_3, \quad q_4 = a_2 - a_3 \cdot a'_{\psi\psi} - a_{\psi\psi} \cdot k'_\delta \cdot T_{AC}^2,$$

$$q_5 = a_3 - a'_{\psi\psi} \cdot k'_\delta \cdot T_{AC}^2, \quad a_2 = k'_\delta + \xi T_{AC}, \quad a_3 = T_{AC}(k'_\delta \xi + T_{AC}), \quad s - \text{переменная}$$

комплексного типа.

Выполнение необходимых условий – коэффициенты характеристического полинома (9) больше нуля – ограничивает область устойчивости снизу и слева:

$$k_\psi > \frac{-a_{\psi\psi}}{|a_{\psi\delta}|}, \quad k'_\psi > \frac{a'_{\psi\psi} + a_{\psi\psi} \cdot k'_\delta}{|a_{\psi\delta}|}.$$

С точки зрения точности стабилизации представляет интерес расположение границы области устойчивости (ГОУ) на плоскости  $k_\psi, k'_\psi$  справа и сверху. Для его определения можно применить известный метод  $D$ -разбиения, который дает вытекающие из (9) параметрические уравнения ГОУ в виде ( $s = j\omega$ ,  $j^2 = -1$ ):

$$\left. \begin{aligned} k_\psi(\omega^2) &= (a_{\psi\psi} + q_3\omega^2 - q_5\omega^4) / |a_{\psi\delta}| \\ k'_\psi(\omega^2) &= (a_{\psi\psi} a_2 + a'_{\psi\psi} + q_4\omega^2 - k'_\delta \cdot T_{AC}^2 \omega^4) / |a_{\psi\delta}| \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

ГОУ строится путем изменения в (10) параметра  $\omega^2$  в интервале от нуля до значения, при котором ее точки выходят из правой половины плоскости  $k_\psi k'_\psi$ . Исключая из (10) параметр  $\omega^2$ , уравнение ГОУ можно получить в виде канонической записи кривой второго порядка

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (11)$$

где  $x = k_\psi$ ,  $y = k'_\psi$ ,  $a_{11} = \frac{q_5}{B^2} \alpha_x^2$ ,  $a_{12} = \frac{q_5}{B^2} \alpha_x \alpha_y$ ,  $a_{22} = \frac{q_5}{B^2} \alpha_y^2$ ,

$$B = q_4 q_5 - k'_\delta T_{AC}^2 q_3, \quad d = \frac{q_5}{B^2} \alpha_x \beta + (|a_{\psi\delta}| + \frac{q_3}{B} \alpha_x) / 2, \quad e = \frac{\alpha_y}{B} (\frac{q_5 \beta}{B} + \frac{q_3}{2}),$$

$$f = -a_{\psi\psi} + \frac{\beta}{B} (q_3 + \frac{q_5 \beta}{B}), \quad \alpha_x = k'_\delta T_{AC}^2 |a_{\psi\delta}|, \quad \alpha_y = -|a_{\psi\delta}| q_5,$$

$$\beta = q_5 (a_{\psi\psi} a_2 + a'_{\psi\psi}) - k'_\delta T_{AC}^2 a_{\psi\psi}.$$

Преобразованием координат (смещение осей и их поворот) можно показать, что для математической модели (2) системы стабилизации вращательно-го движения РКН кривая (11) является эллипсом. Однако, если принять во внимание, что коэффициент  $k'_\delta T_{AC}^2$  при  $\omega^4$  во втором уравнении (10) равен произведению трех величин, меньших единицы, то, приравнявая его нулю, приходим к уравнению ГОУ в виде параболы, как и в работах [2, 7]. Это дает возможность находить первое приближение при использовании более точного уравнения (11). Расчеты подтверждают, что вследствие малости названного коэффициента расположенная в правом верхнем квадранте плоскости  $k_\psi k'_\psi$  часть эллипса несущественно отличается от параболы

$$x = a \cdot y^2 + b \cdot y + c, \quad (12)$$

где  $a = a_{\psi\delta} \cdot q_5 / q_4^2$ ,  $b = (2q_5(a_2 a_{\psi\psi} + a'_{\psi\psi}) / q_4 + q_3) / q_4$ ,

$$c = [-a_{\psi\psi} + \frac{q_3}{q_4} (a'_{\psi\psi} + a_2 a_{\psi\psi}) + \frac{q_5}{q_4^2} (a_2^2 a_{\psi\psi}^2 + (a'_{\psi\psi})^2 + 2a_2 a_{\psi\psi} a'_{\psi\psi})] / a_{\psi\delta}.$$

Для РКН коэффициент  $a_{\psi\delta}$  уравнений возмущенного движения (2) меньше нуля, поэтому ветви параболы (12) – ГОУ справа – направлены противоположно оси  $x = k_\psi$ . Координаты ее вершины

$$x_{\hat{A}} = c + \frac{b^2 q_4^2}{4q_5 |a_{\psi\delta}|}, \quad y_{\hat{A}} = \frac{b q_4^2}{2q_5 |a_{\psi\delta}|}. \quad (13)$$

С целью установить влияние коэффициентов закона регулирования  $k'_\delta$  и  $k''_\psi$  на расположение ГОУ справа выделим в (13) слагаемые, не содержащие произведения трех меньших единицы величин, тогда

$$x_A \approx \frac{b}{|a_{\psi\delta}|} \left( \frac{b(k'_\delta + \xi T_{AC})^2}{4T_{AC}(k'_\delta \xi + T_{AC})} + |a'_{\psi\psi}| \right), \quad y_A \approx \frac{b(k'_\delta + \xi T_{AC})^2}{2|a_{\psi\delta}| T_{AC}(k'_\delta \xi + T_{AC})},$$

$$b \approx \frac{q_3}{q_4} = \frac{1 - a'_{\psi\psi}(k'_\delta + \xi T_{AC}) + |a_{\psi\delta}| k''_{\psi}}{k'_\delta + \xi T_{AC}}. \quad (14)$$

Из выражений (14) следует, что, как и в работе [7], введение в закон регулирования (1) слагаемого  $k''_{\psi}\dot{\psi}$  приводит к увеличению коэффициента параболы  $b$  и, как следствие, к возрастанию координат вершины параболы – ГОУ справа на плоскости  $k_{\psi}, k'_{\psi}$ . Как видно из (14), введение в левую часть закона регулирования (1) слагаемого  $k'_\delta\dot{\delta}$  приводит к обратному эффекту, но ограничение снизу  $k'_\delta$  необходимо для уменьшения ширины полосы пропускания АС и соответствующего снижения уровня высокочастотных помех.

Запас устойчивости по коэффициенту закона регулирования  $k_{\psi}$  количественно оценим отношением  $k_{\psi} / k_{\psi b}$ , где  $k_{\psi b}$  – соответствующая координата вершины параболы (13), ограничивающей область устойчивости на названной плоскости. Уточнение значения  $k_{\psi b}$  достигается путем численного решения уравнения (11) относительно  $x$ , наибольшее значение которого принимается равным  $k_{\psi b}$ . Уменьшение погрешностей системы стабилизации следует из соотношений (5), (7) и (13), (14), устанавливающих зависимость расположения ГОУ на плоскости коэффициентов  $k_{\psi}, k'_{\psi}$  справа и сверху от коэффициентов  $k'_\delta, k''_{\psi}$  закона регулирования (рис. 1, 2). Значение коэффициента закона регулирования  $k'_{\psi}$  устанавливалось из условия наименьшей длительности переходного процесса  $T_p$  (рис. 3).

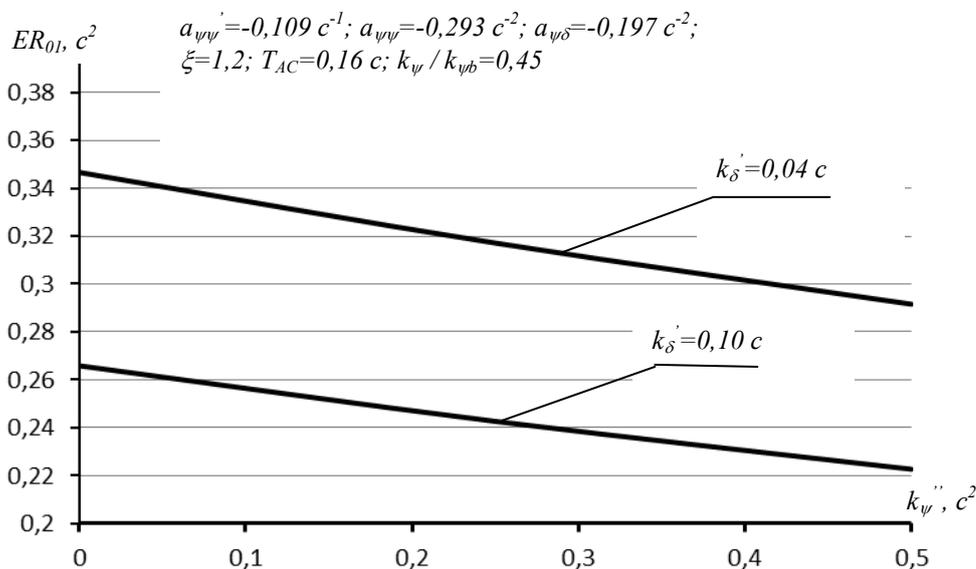


Рис. 1

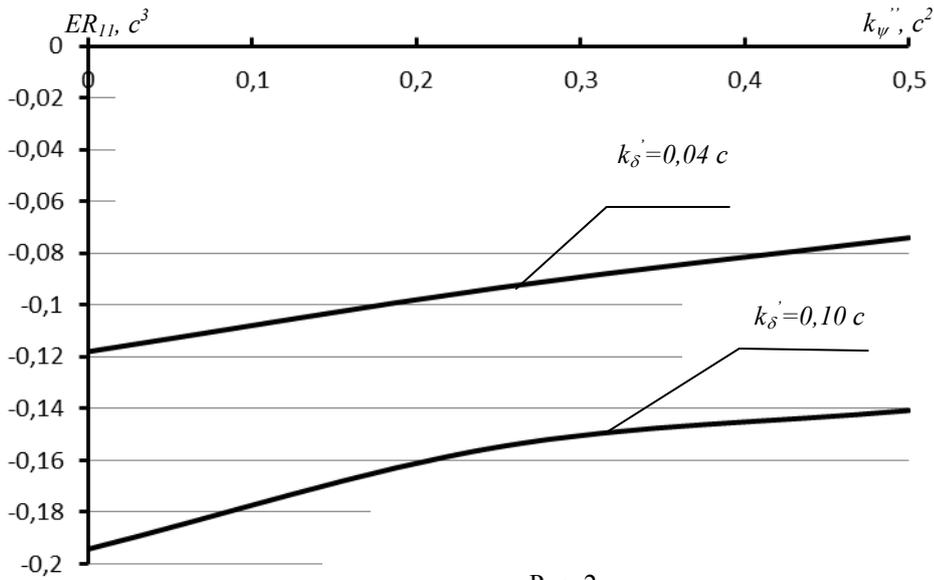


Рис. 2

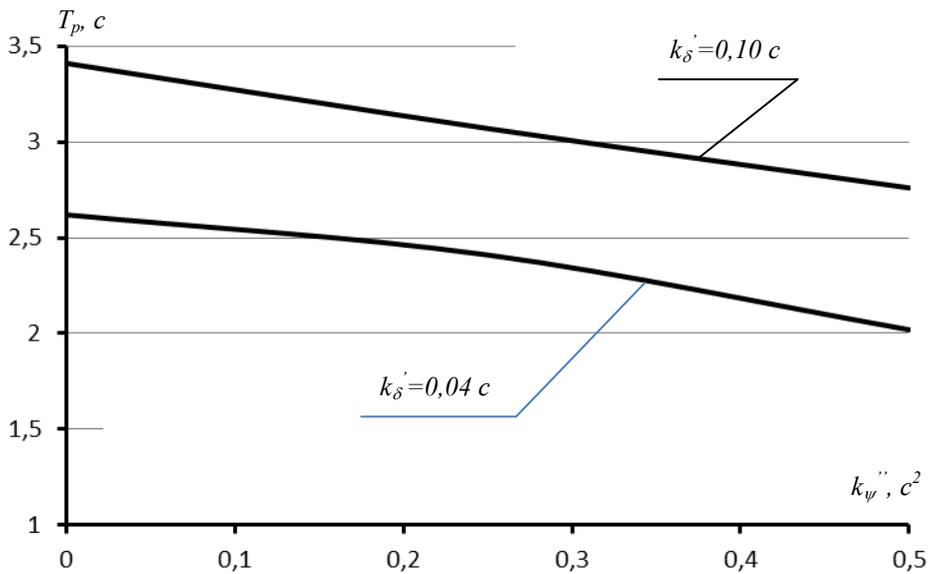


Рис. 3

### Выводы.

1. Установлена зависимость коэффициентов ошибок системы стабилизации вращательного движения ракеты в плоскости рыскания для постоянно и линейно возрастающего возмущающих воздействий от коэффициентов

уравнений движения, параметров автомата стабилизации и закона регулирования.

2. Определена область устойчивости на плоскости двух коэффициентов закона регулирования, необходимая для выбора их значений с учетом обеспечения заданного запаса устойчивости.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем стабилизации РКН, так как наличие аналитических соотношений между ее параметрами и точностью определяет направление их возможных изменений и дает начальное приближение при использовании более точных моделей.

1. *Айзенберг Я. Е.* Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов / *Я. Е. Айзенберг, В. Г. Сухорезный*. – М. : Машиностроение, 1986. – 224 с.
2. Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и космических ступеней : монография / *И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун* ; под ред. акад. *С. Н. Конохова*. – Д. : Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2010. – 264 с.
3. *Колесников К. С.* Динамика ракет / *К. С. Колесников*. – М. : Машиностроение, 1980. – 376 с.
4. *Кузовков Н. Т.* Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет) / *Н. Т. Кузовков*. – М. : Высш. шк., 1976. – 364 с.
5. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под ред. *М. С. Хитрика и С. М. Федорова*. – М. : Машиностроение, 1976. – 272 с.
6. Управление по углам атаки и скольжения первых ступеней РН / *Я. Е. Айзенберг, Ю. М. Златкин, А. Н. Калногуз, В. А. Батаев, А. И. Кузьмин* / *Косм. наука і технологія*. – 2002. – Т. 8, № 1. – С. 61 – 80.
7. *Авдеев В. В.* Влияние закона управления и постоянной времени регулятора на запас устойчивости системы стабилизации вращательного движения ракеты / *В. В. Авдеев* // «Информационные технологии в управлении сложными системами», материалы научной конф. июнь 2013 г. : Сб. докладов. – Днепропетровск, ИТМ НАНУ и ДКАУ, 2013. – С. 1 – 3. – ISBN 978-966-02-6863-0. 4.01

Днепропетровский национальный университет,  
Днепропетровск

Получено 28.11.13,  
в окончательном варианте 16.09.14