УДК 681.5

С.В. ХОРОШИЛОВ

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ КОМПЕНСАТОРОВ ВОЗМУЩЕНИЙ В ФОРМЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ РАСШИРЕННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Целью статьи является синтез компенсаторов возмущений в форме наблюдателя расширенного вектора состояния с учетом выбранного критерия оптимальности и ограничений, обеспечивающих заданные показатели качества переходных процессов. Предложены новые процедуры синтеза компенсаторов возмущений, субоптимальных по критериям минимума нормы H_2 или H_∞, с учетом ограничений на расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы, определяющих требуемые показатели качества переходных процессов в наблюдателе. Такой подход позволяет обеспечить необходимую точность оценивания возмущений при наличии помех измерителей. Решение задачи нахождения субоптимального наблюдателя выполнено с использованием методологии оптимизации H_2 и H_∞, а также аппарата линейных матричных неравенств. Проведены исследования синтезированных компенсаторов во временной и частотной областях, иллюстрирующие особенности использования и эффективность разработанных процедур. Результаты статьи могут быть применены на практике для решения задач управления в условиях неопределенности при наличии существенных помех измерителей с использованием двухконтурной схемы, когда внешний контур (регулятор) реализует критерий стабилизации, а внутренний (компенсатор) – критерий компенсации или уменьшения влияния возмущений.

Метою статті є синтез компенсаторів збурень у формі спостерігача розширеного вектора стану з урахуванням обраного критерію оптимальності і обмежень, що забезпечують задані показники якості перехідних процесів. Запропоновано нові процедури синтезу компенсаторів збурень, що субоптимальні за критеріями мінімуму норми H_2 або H_∞, з урахуванням обмежень на розташування полюсів передавальної функції замкнутої системи, які визначають необхідні показники якості перехідних процесів у спостерігачі. Такий підхід дозволяє забезпечити необхідну точність оцінювання збурень при наявності перешкод вимірників. Розв’язання задачі знаходження субоптимального спостерігача виконано з використанням методології оптимізації H_2 і H_∞, а також апарата лінійних матричних нерівностей. Проведено дослідження в часовій і частотній областях синтезованих компенсаторів, що ілюструють особливості використання та ефективність розроблених процедур. Результати статті можуть бути використані на практиці для вирішення задач керування в умовах невизначеності при наявності істотних перешкод вимірників з використанням двоконтурної схеми, коли зовнішній контур (регулятор) реалізує критерій стабілізації, а внутрішній (компенсатор) – критерій компенсації або зменшення впливу збурень.

The purpose of this paper is to synthesize disturbance compensators in the form of an extended state-vector observer, taking into account the chosen optimality criterion and restrictions to provide given quality indices for transient processes. New procedures for synthesis of disturbance compensators, which are suboptimal according to minimum-rate criteria H_2 or H_∞, are proposed considering restrictions on locations of poles of the transfer function of a closed system for the required quality indices of transient processes of the observer. This approach allows a necessary accuracy of the disturbance estimation with noise of sensors. The problem for finding a suboptimal observer is solved using the methodology of optimization for H_2 and H_∞ and a technique of linear matrix inequalities. Investigations of the synthesized compensators in time and frequency domains are carried out to illustrate special features and the efficiency of the procedures proposed. The results of the paper can be used in practice for solving control problems under conditions of uncertainty and significant sensor noise, using the two-loop approach. According to this approach an outer loop (controller) realizes the stabilization criterion and an internal loop (compensator) provides a criterion for compensation or reduction of the effect of disturbances.

Проблема управления динамическими объектами в условиях априорной неопределенности модели объекта и внешних возмущений занимает центральное место в современной теории автоматического управления и имеет важное практическое значение. На практике все объекты управления в той или иной степени являются неопределенными. Параметры объекта в ряде случаев известны приближенно, его математическая модель может быть настолько сложной, что не позволяет ее использовать при синтезе законов управления, внешние возмущения также часто неизвестны.

Один из эффективных подходов решения задач управления в условиях неопределенности основан на восстановлении с помощью наблюдателя вектора суммарного эквивалентного возмущения, который кроме внешних воздействий так же включает и внутренние воздействия, обусловленные неточностями математического описания объекта управления. Такое управление реализуется по двухконтурной схеме с возможностью разделения контуров по целям управления: внешний реализует критерий стабилизации, внутренний – критерий компенсации или уменьшения влияния возмущений. Успешность решения задач управления в условиях неопределенности с использованием такого подхода во многом определяется качеством восстановления возмущений.

Решению актуальных практических задач с использованием различных компенсаторов возмущений посвящено достаточно много работ, например [1 – 3]. Компенсаторы возмущений обычно синтезируются в виде наблюдателей, которые могут иметь постоянные или переменные коэффициенты усиления, представляться в форме передаточных функций или пространства состояний, различаться объемом априорной информация об объекте управления и внешних возмущениях, которая необходима для их построения.

В работах [4, 5] для восстановления и компенсации возмущений используется модуль, получивший название наблюдатель возмущений. Ключевым элементом такого наблюдателя является фильтр нижних частот, который обычно представляется в виде передаточной функции. Эффективность такого компенсатора возмущений при наличии помех измерителей во многом зависит от выбранных характеристик этого фильтра. Несмотря на то, что такой подход с успехом применяется во многих работах, синтез такого наблюдателя представляет собой непростую задачу и требует наличия определенного опыта и хорошего знания особенностей объекта управления и возмущений. Это обусловлено отсутствием строгих процедур выбора структуры и параметров такого фильтра.

В работе [1] для управления динамическими объектами использованы компенсаторы возмущений на основе итерационно-инверсных моделей. Здесь показано, что ошибка оценки возмущений от измерительных помех зависит от параметрической настойки наблюдателей состояния и возмущения, а также числа итераций, которые необходимо, с одной стороны, уменьшать для снижения уровня помех, а с другой стороны увеличивать для приближения к инверсному оператору. Однако в статье отсутствует методика выбора компромиссного решения.

В ряде работ для оценивания возмущений предлагается использовать наблюдатель расширенного вектора состояния. В работе [6] показаны значительные возможности такого наблюдателя по оцениванию различных типовых возмущений, однако качество получаемых оценок при наличии помех измерителей во многом зависит от настройки наблюдателя. В статье [7] предложено выбирать коэффициенты усиления наблюдателя на основании стандартных форм расположения корней характеристического полинома. При таком подходе единственным настраиваемым параметром является полоса пропускания наблюдателя, определенный выбор которого позволяет обеспечить компромисс между точностью оценивания возмущений и чувствительностью к помехам измерителей. Несмотря на то, что эффективность такого подхода иллюстрируется успешным решением ряда практических задач [3, 8], вопрос об оптимальности выбора коэффициентов наблюдателя остается открытым. В связи с этим представляет интерес задача нахождения параметров такого наблюдателя, оптимальных в том или ином смысле, с учетом особенностей задачи оценивания и компенсации возмущений. Именно этому и посвящена статья.

Целью настоящей статьи является синтез компенсаторов возмущений в форме наблюдателя расширенного вектора состояния с учетом выбранного критерия оптимальности и ограничений, обеспечивающих заданные показатели качества переходных процессов.

Наблюдатель расширенного вектора состояния. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка следующего вида:

$$\ddot{y} = f\left(t, y, \dot{y}, w_v\right) + bu \ , \tag{1}$$

где y – измеряемый выход системы; u – вход (управление) системы; f – функция, описывающая внутреннюю динамику объекта управления и внешнее возмущение w_v; b – некоторый параметр, значение которого известно приближенно $b \approx b_0$.

Во многих практических случаях точное математическое описание f получить достаточно сложно. В связи с этим получил развитие подход, основанный на получении в реальном времени оценок $\hat{f} \approx f$ и их использовании при формировании управляющих воздействий следующим образом:

$$u = \left(u_0 - \hat{f}\right) / b_0 \,. \tag{2}$$

С учетом этого выражения уравнение (1) может быть представлено в следующей простой форме:

$$\ddot{y} = u_0 \,. \tag{3}$$

Объект управления в форме (3) представляет собой двойное интегрирующее звено, управление которым не представляет труда, например с помощью следующего пропорционально-дифференциального регулятора:

$$u_0 = k_1 (y_p - \hat{y}) - k_2 \hat{\dot{y}} \,, \tag{4}$$

где k_1, k_2 – коэффициенты закона управления, y_p – программное значение регулируемой величины; $\hat{y}$, $\hat{\dot{y}}$ – текущие оценки величин y, $\dot{y}$.

Подставив выражение (4) в (2), закон управления для исходной задачи (1) получим в виде

$$u = \left(k_1 (y_p - \hat{y}) - k_2 \hat{\dot{y}} - \hat{f}\right) / b_0 \,. \tag{5}$$

Следует отметить, что оценки $\hat{y}$, $\hat{\dot{y}}$, как правило, могут быть получены путем непосредственного их измерения с помощью соответствующих датчиков, а суммарное возмущение f в большинстве практических случаев не может быть непосредственно измерено. Для получения оценок $\hat{f}$ в работе [7] предложено рассматривать расширенный вектор состояния:

$$x_1 = y \,,\ x_2 = \dot{y} \,,\ x_3 = f \ .$$

С использованием такого представления уравнение (1) может быть записано в пространстве состояний следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\ \dot{x}_2 = x_3 + b_0 u\,,\ x_3 = \dot{f}\,,\ \ y = x_1\,. \tag{6}$$

Полагая, что функция f непрерывна во времени и на относительно коротких интервалах времени ее можно считать постоянной $f = \text{const}$, наблюдатель для такого расширенного вектора состояния синтезирован в следующем виде [7]:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - l_1(\hat{x}_1 - x_1),\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - l_2(\hat{x}_1 - x_1) + u/b_0\,,\ \dot{\hat{x}}_3 = -l_3(\hat{x}_1 - x_1), \tag{7}$$

где $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ – оценки величин x_1, x_2, x_3; l_1, l_2, l_3 – коэффициенты усиления наблюдателя.

Коэффициенты усиления наблюдателя предлагается выбирать следующим образом:

$$l_1 = 3\omega_0\,,\ l_2 = 3\omega_0^2,\ l_3 = \omega_0^3\,, \tag{8}$$

где ω_0 – верхняя граница полосы пропускания наблюдателя.

Такой выбор коэффициентов наблюдателя соответствует биномиальному распределению корней характеристического полинома. В этом случае все корни одинаковые, равные действительному отрицательному значению с модулем ω_0. Величина ω_0 выбирается таким образом, чтобы обеспечить требуемый компромисс между быстродействием наблюдателя и его чувствительностью к помехам измерителей. Несмотря на то, что такое решение, безусловно, удобно для использования в инженерной практике, вопрос об его оптимальности остается открытым. В связи с этим представляет интерес решение задачи синтеза рассмотренного класса наблюдателей с учетом выбранного критерия оптимальности.

Критерии оптимальности. Для описания качества многомерных систем управления широко используются различные нормы их передаточных функций $H(j\omega)$. При этом наибольшее применение в современной теории управления получили нормы H_2 и H_∞, которые определяются следующим образом [9]:

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}\left[H^T(-j\omega)H(j\omega)\right]d\omega}\,, \tag{9}$$

$$\|H\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}[H(j\omega)], \tag{10}$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное сингулярное число матричной передаточной функции $H(j\omega)$.

Оптимальный наблюдатель можно найти из условия минимизации H_2 или H_∞ нормы передаточной матрицы замкнутой системы. Так как эти нормы имеют различные свойства и физический смысл, результаты, полученные при рассмотрении этих критериев, также как правило отличаются. В связи с этим при синтезе оптимального компенсатора возмущений будем рассматривать оба эти критерия, а затем сравним полученные результаты.

Наблюдатель в пространстве состояний. Представим уравнения объекта управления (6) и наблюдателя в матричной форме (7):

$$\dot{X} = AX + Bu , \tag{11}$$

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L\left(Y - C\hat{X}\right), \tag{12}$$

$$Y = CX + DW . \tag{13}$$

Матрицы, входящие в (11) – (13), имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} w_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, где w_i – помеха измерителя; d – некоторый параметр.

Рассмотрим вектор ошибки наблюдателя $X_e = X - \hat{X}$. Вычитая из уравнения (11) уравнение (12), получим уравнение, описывающее изменение ошибки наблюдателя

$$\dot{X}_e = AX_e + LCX_e + LDW . \tag{14}$$

Представим уравнение (14) в стандартной форме пространства состояний

$$\dot{X}_e = AX_e + B_e L_L , \; B_e = I , \; L_L = LY_e , \tag{15}$$

$$Y_e = CX_e + DW , \tag{16}$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности.

Используя (15), (16), процесс оценивания расширенного вектора состояния можно рассматривать в виде динамической системы «объект управления $G(s)$ – наблюдатель $L(s)$» (рис. 1). В этом случае наблюдатель выполняет функции регулятора, который обеспечивает стабилизацию вектора выхода Z (ошибки оценивания вектора состояния) по результатам измерений Y_e при наличии помех W .

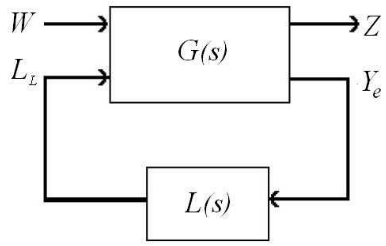

Рис. 1

Для синтеза наблюдателя представим уравнения (15), (16) в следующей форме:

$$\dot{X}_e = AX_e + B_1 W + B_2 L_L ,$$

$$Z = C_1 X_e + D_{11} W + D_{12} L_L ,$$

$$Y_e = C_2 X + D_{21} W + D_{22} L_L ,$$

где $B_1 = 0$, $B_2 = B_e$, $C_1 = I$, $D_{11} = 0$, $D_{12} = 0$, $C_2 = C$, $D_{21} = D$, $D_{22} = 0$.

Синтезируемый наблюдатель $L(s)$ может быть также представлен в пространстве состояний

$$\dot{X}_L = A_L X_L + B_L Y_e, \tag{17}$$

$$L_L = C_L X_L + D_L Y_e, \tag{18}$$

где X_L – вектор состояния наблюдателя.

В результате синтеза наблюдателя необходимо найти значения матриц A_L, B_L, C_L, D_L, которые минимизируют выбранный критерий качества.

Поведение замкнутой системы «объект $G(s)$ – наблюдатель $L(s)$» также представим в форме пространства состояний

$$\dot{X}_{CL} = A_{CL} X_{CL} + B_{CL} W ,$$

$$Z = C_{CL} X_{CL} + D_{CL} W ,$$

где

$$X_{CL} = \begin{bmatrix} X_e \\ X_L \end{bmatrix},\ A_{CL} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_L C_2 & B_2 C_L \\ B_L C_2 & A_L \end{bmatrix},\ B_{CL} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_L D_{21} \\ B_K D_{21} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$C_{CL} = \left[\left(C_1 + D_{12} D_L C_2 \right) \quad D_{12} C_L \right],\ D_{CL} = \left[D_{11} + D_{12} D_L D_{21} \right].$$

Передаточная функция замкнутой системы от входа W к выходу Z может быть представлена следующим образом:

$$G_{ZW}(s) = C_{CL} \left(Is - A_{CL} \right)^{-1} B_{CL} + D_{CL} .$$

Наблюдатель H_2. Синтезируем наблюдатель, удовлетворяющий следующему критерию:

$$\|G_{ZW}\|_2 \to \min . \quad (20)$$

Для упрощения процедуры нахождения матриц наблюдателя (17), (18) оптимизационную задачу (20) удобно заменить субоптимальной:

$$\|G_{ZW}\|_2 < \nu_{\min} , \quad (21)$$

где $\nu_{\min}$ – некоторое выбранное число.

В работе [10] показано, что условие (21) выполняется в том случае, если существуют симметричные матрицы V и $Q = C_{CL} V^{-1} C_{CL}^T$, для которых верны следующие матричные неравенства:

$$\begin{bmatrix} A_{CL}^T V + V A_{CL} & V B_{CL} \\ B_{CL} V^T & -I \end{bmatrix} < 0 , \quad \begin{bmatrix} V & C_{CL}^T \\ C_{CL} & Q \end{bmatrix} > 0 , \quad (22)$$

$$\operatorname{trace}(Q) < \nu_{\mathbf{min}} . \quad (23)$$

Анализируя выражения для матриц замкнутой системы (19), можно сделать вывод о нелинейности матричных неравенств (22). Эта особенность вызывает существенные сложности при нахождении матриц наблюдателя с использованием неравенств (22).

Для линеаризации этих неравенств в работе [12] предложено использовать следующие новые переменные:

$$\hat{A}_L = T A_L O^T + T B_L C_2 V + R B_2 C_L O^T + R(A + B_2 D_k C_2) V , \quad (24)$$

$$\hat{B}_L = T B_L + R B_2 D_L , \quad (25)$$

$$\hat{C}_L = C_L O^T + D_L C_2 V . \quad (26)$$

Матрицы O, T, V, R, входящие в (24) – (26), связаны следующим образом:

$$O T^T = I - VR .$$

Матрицы O и T могут быть найдены таким образом:

$$O = n_1 \overline{n}_d , \; T = \overline{n}_d n_2^T , \; \overline{n}_d = diag\left(\sqrt{n_d}\right),$$

где s_d – матрица, у которой на главной диагонали расположены сингулярные собственные числа матрицы $[I - VR]$, а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми.

Матрица n_d может быть вычислена с использованием сингулярного разложения (svd)

$$\operatorname{svd}(I - VR) = n_1 n_d n_2^T ,$$

где n_1, n_2 – унитарные матрицы, состоящие из левых и правых собственных сингулярных векторов соответственно.

С помощью новых переменных (24) – (26) нелинейные неравенства (22) могут быть преобразованы к следующей системе линейных матричных неравенств (ЛМН):

$$\begin{bmatrix} \mathrm{sym}\left(AV + B_2\hat{C}_L\right) & \hat{A}_L + A + B_2 D_L C_2 & B_1 + B_2 D_L D_{21} \\ (*)^T & \mathrm{sym}\left(RA + \hat{B}_L C_2\right) & RB_1 + \hat{B}_L D_{21} \\ (*)^T & (*)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} V & I & \left(C_1 V + D_2\hat{C}_L\right)^T \\ (*)^T & R & \left(C_1 + D_2 D_L C_2\right)^T \\ (*)^T & (*)^T & Q \end{bmatrix} > 0, \quad (28)$$

где обозначение sym использовано для сокращенного представления следующей операции: $\mathrm{sym}(A) = A + A^T$; символ $(*)^T$ обозначает транспонированный элемент матрицы, который расположен симметрично относительно главной диагонали.

Таким образом, решая ЛМН (23), (27), (28), можно найти матрицы $\hat{A}_L$, $\hat{B}_L$, $\hat{C}_L$, D_L, V, R для минимального значения $v = v_{\mathbf{min}}$. После этого искомые матрицы наблюдателя, обеспечивающие выполнения условия (21), определяются следующим образом:

$$C_L = \left(\hat{C}_L - D_L C_2 V\right)\left(O^T\right)^{-1}, \quad (29)$$

$$B_L = T^{-1}\left(\hat{B}_L - RB_2 D_L\right), \quad (30)$$

$$A_L = T^{-1}\left(\hat{A}_L - TB_L C_2 V - RB_2 C_L O^T - R\left(A + B_2 D_k C_2\right)V\right)\left(O^T\right)^{-1}. \quad (31)$$

Наблюдатель H∞. Синтезируем наблюдатель с учетом следующего критерия:

$$\left\|G_{ZW}\right\|_\infty \to \min. \quad (32)$$

Задачу нахождения оптимальных параметров наблюдателя (17), (18), согласно критерию (32), также целесообразно заменить следующей субоптимальной задачей:

$$\left\|G_{ZW}\right\|_\infty < \gamma_{\min}, \quad (33)$$

где $\gamma_{\min}$ – некоторое выбранное число.

В соответствии с работой [10] условие (33) выполняется в том случае, если существует симметричная положительно определенная матрица V, для которой выполняется следующее матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} A_{CL}^T V + VA_{CL} & VB_{CL} & C_{CL}^T \\ (*)^T & -\gamma I & D_{CL}^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \qquad (34)$$

$$\gamma < \gamma_{\min}.$$

С использованием новых переменных (24) – (26) это неравенство может быть линеаризовано и представлено в следующем виде.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{sym}\left(AV + B_2\hat{C}_L\right) & \hat{A}_L^T + A + B_2 D_L C_2 & B_1 + B_2 D_L D_{21} & VC_1^T + \hat{C}_L^T D_{21}^T \\ (*)^T & \mathrm{sym}\left(RA + \hat{B}_L C_2\right) & RB_1 + \hat{B}_L D_{21} & C_1^T + C_2^T D_L^T + D_{12}^T \\ (*)^T & (*)^T & -\gamma I & D_{11}^T + D_{21}^T D_L D_{12}^T \\ (*)^T & (*)^T & (*)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \qquad (35)$$

Решая это ЛМН, можно найти минимальное значение $\gamma = \gamma_{\min}$, для которого существуют матрицы $\hat{A}_L$, $\hat{B}_L$, $\hat{C}_L$, D_L, V, R, а затем с использованием выражений (29) – (31) вычислить искомые матрицы наблюдателя, обеспечивающие выполнения условия (33).

Ограничения на расположение полюсов передаточной функции. Представленная выше методология позволяет найти оптимальный в том или ином смысле наблюдатель, однако не позволяет задавать требования к качеству его переходных процессов, в частности к их длительности. При этом следует отметить, что с учетом особенностей рассматриваемой задачи длительность переходных процессов имеет важное значение, так как предположения, определяющие выбранную математическую модель возмущения, могут выполняться лишь на ограниченном интервале времени. Неудовлетворение требованиям по длительности переходных процессов приводит к значительным ошибкам оценивания возмущений.

Характер переходного процесса определяют расположение и вид корней характеристического полинома λ_i (полюсов передаточной функции замкнутой системы). Поэтому требования к запасу устойчивости и быстродействию можно сформулировать, накладывая ограничения на корни характеристического полинома. Например, быстродействие наблюдателя может быть оценено по абсолютной величине действительной части ближайшего к мнимой оси корня, а запас устойчивости – по максимальному отношению мнимой части корня к его действительной части.

Ограниченную выпуклую область на комплексной плоскости, в которой необходимо разместить полюса передаточной функции замкнутой системы, опишем с помощью аппарата ЛМН. В соответствии с этой методологией любая выпуклая область комплексной плоскости, симметричная относительно действительной оси, может быть аппроксимирована ЛМН-областью с заданной точностью.

Выпуклая область Λ левой комплексной полуплоскости Θ может быть представлена так [10]:

$$\Lambda = \left\{z \in \Theta : f_\Lambda(z) < 0\right\},$$

где $f_\Lambda(z)$ – характеристическая функция области Λ.

Функция $f_\Lambda(z)$ представляется следующим образом:

$$f_\Lambda(z) = N + Mz + M^T\bar{z},$$

где N, M – эрмитовые матрицы; $\bar{z}$ – комплексно сопряженная переменная для z.

Определенный выбор матриц N, M позволяет представить достаточно широкое множество областей для размещения полюсов, а именно полуплоскости, круги, секторы, вертикальные и горизонтальные полосы, а также любые пересечения таких областей.

С учетом особенностей рассмотренной задачи представляется целесообразным использование областей в форме вертикальной полосы $h_1 < \mathrm{Re}(\lambda_i) < h_2$

$$f_\Lambda(z) = \begin{vmatrix} 2h_1 - (z+\bar{z}) & 0 \\ 0 & (z+\bar{z}) - 2h_2 \end{vmatrix},$$

а также конического сектора с углом 2θ

$$f_\Lambda(z) = \begin{vmatrix} \sin\theta(z+\bar{z}) & -\cos\theta(z-\bar{z}) \\ \cos\theta(z-\bar{z}) & \sin\theta(z-\bar{z}) \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Известно [10], что все собственные числа матрицы A_{CL} будут находиться в области Λ, если существует симметричная положительно определенная матрица V, для которой выполняется следующее условие:

$$N \otimes V + M \otimes (A_{CL}V) + M^T \otimes (A_{CL}V)^T < 0,$$

где $\otimes$ – символ, обозначающий кронекерово произведение матриц.

Применяя замену переменных (24) – (26), это неравенство можно представить в виде ЛМН следующим образом:

$$N \otimes \Psi + M \otimes \Phi + M^T \otimes \Phi^T < 0. \quad (37)$$

Здесь матрицы Ψ и Φ определяются следующим образом:

$$\Psi = \begin{bmatrix} V & I \\ I & R \end{bmatrix}, \; \Phi = \begin{bmatrix} AV + B_2\hat{C}_L & A + B_2D_LC_2 \\ \hat{A}_L & RA + \hat{B}_LC_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрицы наблюдателя (17, 18) с учетом ограничений на размещение полюсов замкнутой системы могут быть найдены путем решения ЛМН (37). Совместное решение неравенства (37) с неравенствами, полученными выше, а именно (23), (27), (28), для случая использования критерия H_2, и (35) для критерия H_∞ позволяет синтезировать субоптимальный наблюдатель с учетом ограничений на расположение полюсов замкнутой системы.

Анализ характеристик компенсаторов. Исследуем свойства наблюдателей, синтезированных с использованием представленной выше методологии. Матрицы наблюдателей найдены путем численного решения ЛМН с помощью метода, изложенного в работе [12], для следующих исходных данных: $b_0 = 1$, $d = 0{,}002$. На рис. 2, 4, 6 представлены сингулярные числа передаточной функции $G_{zw}(s)$, а на рис. 3, 5, 7 изображены эти же показатели для передаточной функции $G_{\hat{f}f}(s)$, выражающей связь между входным возмущением f и его оценкой на выходе наблюдателя $\hat{f}$. Зависимость сингулярных чисел от частоты в многомерных системах является обобщением амплитудно-частотной характеристики в одномерных системах. На рис. 2 – 7 линиями 1 и 2 изображены характеристики для H_2 и H_∞ наблюдателей соответственно. На рис. 4 – 7 линией 3 показаны сингулярные числа наблюдателя для случая выбора его коэффициентов усиления в соответствии с биноминальным распределением корней (8).

На рис. 2, 3 представлены частотные характеристики субоптимальных наблюдателей, синтезированных без ограничений на размещение полюсов передаточной функции.

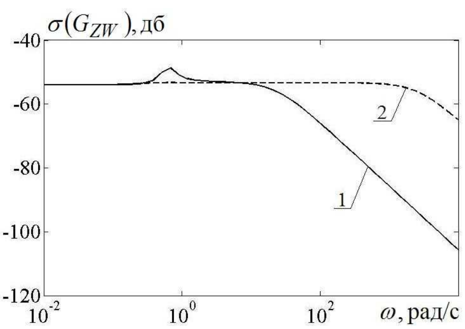

Рис. 2

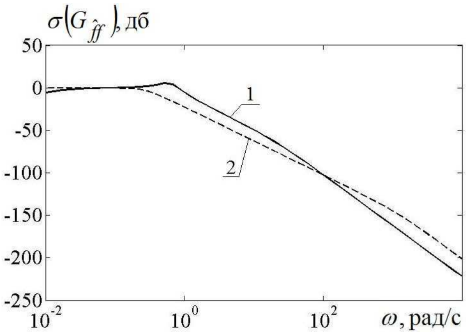

Рис. 3

Из рис. 2 видно, что оба наблюдателя обеспечивают хорошее подавление помех во всем диапазоне частот. При этом наблюдатель H_∞ обладает некоторым преимуществом с точки зрения подавления помехи для наихудшего ее случая, а наблюдатель H_2 отличается лучшими фильтрующими свойствами относительно помехи в высокочастотной области. Из рис. 3 видно, что наблюдатель H_2 позволяет обеспечить приемлемую ошибку оценивания возмущения в более широком диапазоне частот по сравнению с наблюдателем H_∞. Некоторый консерватизм наблюдателя H_∞ с этой точки зрения является платой за лучшее подавление помех для наихудшего их случая.

На рис. 4, 5 представлены сингулярные числа для наблюдателей, синтезированных с учетом ограничения на расположение полюсов в виде полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -2$, а на рис. 6, 7 эти же характеристики при ограничении $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -10$. Использование таких ограничений позволяет сократить продолжительность переходных процессов в наблюдателе, что дает возможность обеспечить приемлемую ошибку оценивания возмущений в требуемом диапазоне частот (рис. 5, 7), однако платой за это является ухудшение свойств наблюдателя по фильтрации помех измерителя (рис. 5, 7). При одинаковых ограничениях наблюдатель с биноминальным распределением полюсов обладает некоторыми преимуществами с точки зрения подавления шумов измерителя, наблюдатель H_∞ обладает лучшей частотной характеристикой передаточной функции $G_{\hat{f}f}(s)$, а использование критерия H_2 позволяет получить некоторый компромиссный вариант.

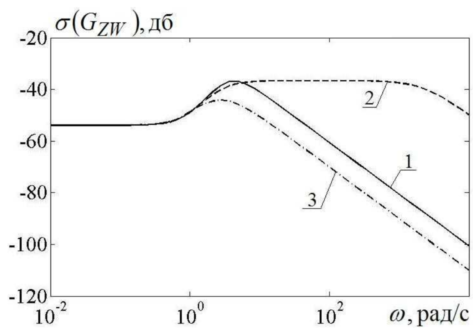

Рис. 4

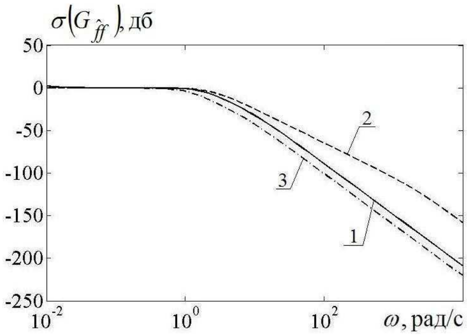

Рис. 5

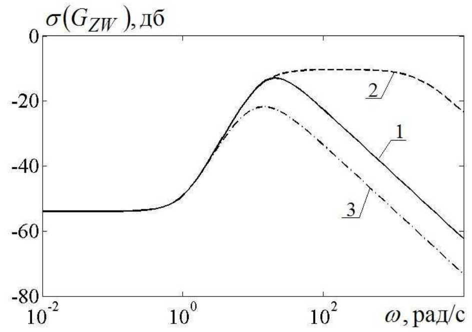

Рис. 6

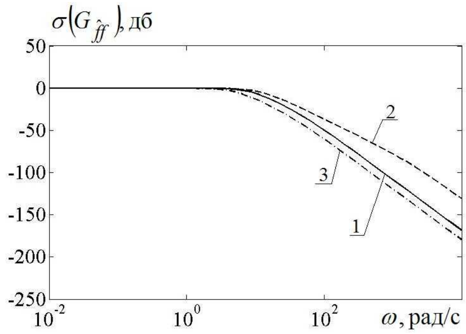

Рис. 7

Результаты численного моделирования процесса оценивания возмущений наблюдателями H_2 и H_∞, синтезированными без ограничений на расположение полюсов, представлены соответственно на рис. 8 и 9. При моделировании возмущение и помеха измерителя представлялись следующим образом:

$$f = f_0 \sin(0{,}1t)\,,\ f_0 = 0{,}01\ \text{Н}\cdot\text{м}\,;\ w_i = w_{i0}\sin(100t)\,,\ w_{i0} = 0{,}0017\ \text{рад}\,.$$

На этих рисунках линией 1 показано возмущение f, линией 2 – его оценка, а линией 3 изображена ошибка оценивания возмущения. Как следует из результатов моделирования, для рассмотренного случая наблюдатель H_2 обеспечивает меньшую погрешность оценивания возмущения, однако на начальном интервале времени присутствует существенная ошибка, обусловленная значительным перерегулированием переходной характеристики наблюдателя. Уменьшить перерегулирование можно путем учета ограничений на расположение полюсов в форме конического сектора (32).

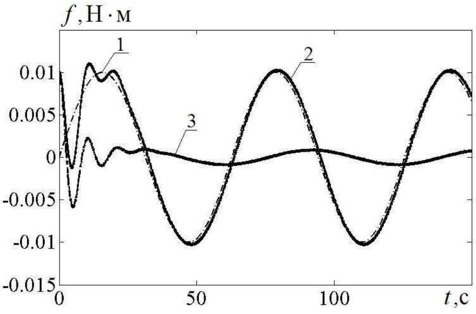

Рис. 8

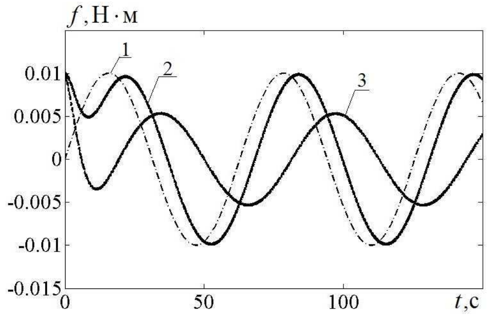

Рис. 9

Результаты моделирования управляемого движения системы (1) с комбинированными регуляторами для случаев использования наблюдателя H_2 и H_∞ представлены соответственно на рис. 10 и рис. 11. Здесь линией 1 показаны результаты, полученные при использовании наблюдателей, синтезированных без ограничений на расположение полюсов, линиями 2 и 3 показаны случаи учета ограничений $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -2$ и $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -5$ соответственно. При моделировании использованы следующие значения коэффициентов внешнего контура регулятора (4):

$$k_1 = \omega_r^2,\ k_2 = 2\omega_r,\ \omega_r = 0{,}1 \text{ рад/с}.$$

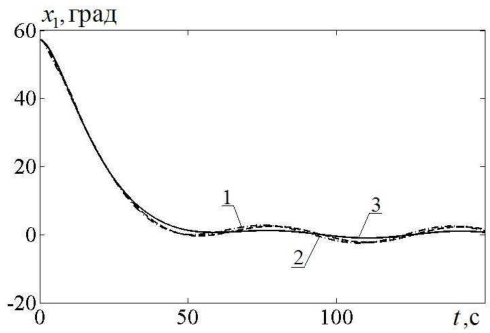

Рис. 10

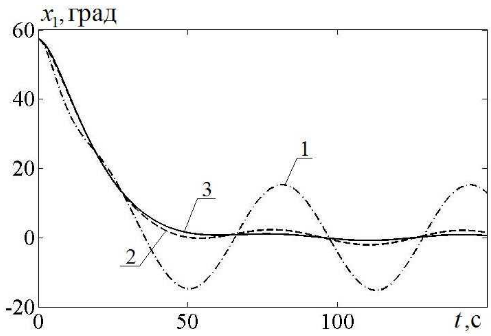

Рис. 11

Заключение. В статье проведены исследования возможностей применения методологии оптимизации по критериям H_2 и H_∞ при синтезе компенсаторов возмущений в форме наблюдателя расширенного вектора состояния. Решение задачи нахождения субоптимального наблюдателя выполнено с использованием аппарата линейных матричных неравенств. При синтезе наблюдателя учитываются ограничения на расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы. Использование таких ограничений позволяет учесть требования к качеству переходных процессов в наблюдателе и обеспечить необходимую точность оценивания возмущений при наличии помех измерителей.

1. *Кортунов В. И.* Управление динамическими объектами с компенсаторами возмущений на основе итерационно-инверсных моделей / *В. И. Кортунов* // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2003. – Вип. 23/2.– С. 98 – 104.
2. *Потапенко Е. М.* Синтез и анализ робастной системы управления маневрирующего космического аппарата / *Е. М. Потапенко, В. Г. Бичай* // Космические исследования. – 1998. – Т. 36, №. 4.– С. 399 – 406.
3. *Chen Z.* Active disturbance rejection control of chemical processes / *Z. Chen, Q. Zheng, Z. Cao* // 16th IEEE International conference on control application. – 2007. – P. 855 – 861.
4. *Schrijver E.* Disturbance observers for rigid mechanical systems: equivalence, stability, and design / *E. Schrijver, J. Dijk* // ASME Journal of dynamics systems, measurement, and control. – 2000. – Vol. 124.– P. 3 – 11.
5. *White M. T.* Improved track following in magnetic disc drives using a disturbance observer / *M. T. White, M. Tomizuka, C. Smith* // IEEE/ASME Trans. On Mechatronics. – 2002. – Vol. 5, No.1. – P. 539 – 548.
6. *Yang X.* Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties / *X. Yang, Y. Huang* // Proceeding of the American Control Conference. – 2009. – P. 3700 – 3705.
7. *Gao Z.* Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design / *Z. Gao* // Proceeding of the American Control Conference. – 2006. – P. 2399 – 2405.
8. *Alexander B. X. S.* A novel application of extended state observer for high performance control of NASA’s HSS flywheel and fault detection / *B. X. S. Alexander, R. Rarick, L. Dong* // Proceeding of the American Control Conference. – 2008. – P. 5216 – 5221.
9. *Zhou K.* Robust and optimal Control / *K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover*. – NJ : Prentice-Hall, 1996. – 596 p.
10. *Chilali M.* Robust pole placement in LMI regions / *M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian* // IEEE Trans. on automatic control. – 1999. – Vol. 44. – P. 2257 – 2270.
11. *Chilali M.* H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach / *M. Chilali, P. Gahinet* // IEEE Trans. on automatic control. – 1996. – Vol. 41. – P. 358 – 367.
12. *Nesterov Y.* The Projective method for solving linear matrix inequalities / *Y. Nesterov, A. Nemirovskii* // Math. Programming Series B. – 1997. – Vol. 77. – P. 163 – 190.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепропетровск

Получено 25.03.14,
в окончательном варианте 03.06.14